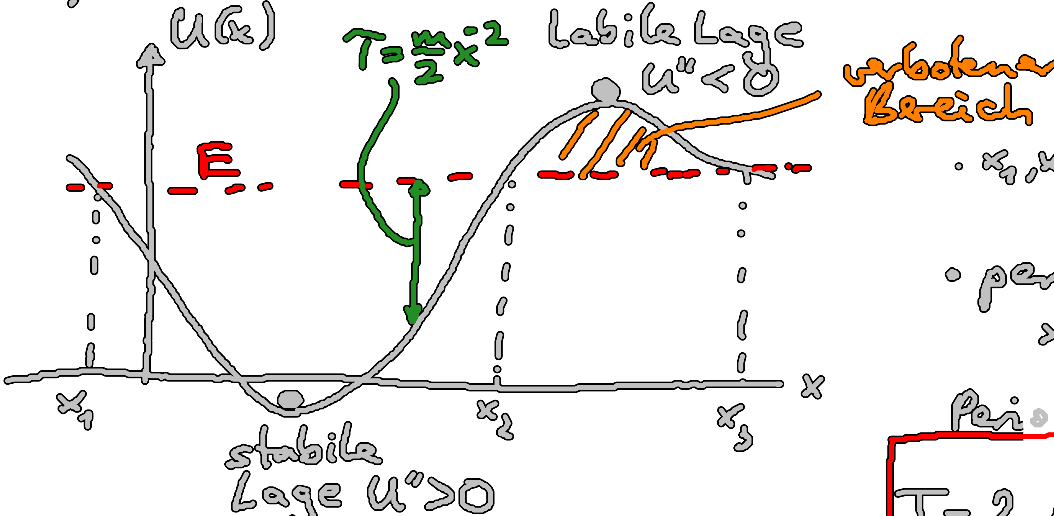
4.2 Bewegung im kons. Kraftfeld

• $$\boxed{m\ddot{x} = -U'(x)} \quad (4.2)$$

$$\boxed{\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E} \quad (4.3)$$

$$\boxed{t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}} \quad (4.4)$$

• <u>qualitative Diskussion</u>



• $x_1, x_2, x_3 \dots$ Umkehrpkte $\dot{x} = 0$!

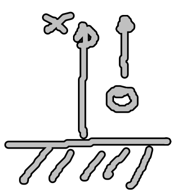
• periodische Bewegung

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

Periodendauer:

$$\boxed{T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}} \quad (4.6)$$

a) <u>Senkrechte Wurf bei konst. Gewichtskraft</u>



$$m\ddot{x} = -mg$$

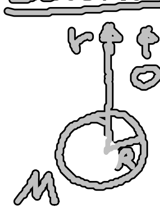
$$\dot{x} = -gt + v_0 \quad (4.7)$$

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \quad (4.8)$$

• Steighöhe h von $x_0 = 0$: Umkehrpkt: $\dot{x} = 0 \xrightarrow{(4.7)} t = \frac{v_0}{g}$

$$\xrightarrow{(4.8)} \boxed{h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} \quad (4.9)$$

b) <u>Senkrechte Wurf im Gravitationspotential</u>



$$m\ddot{r} = -\gamma\frac{mM}{r^2} = -mg\frac{R^2}{r^2} \quad (4.10)$$

$$g = \gamma\frac{M}{R^2}$$

1. Integral: $\int (4.10)\cdot \dot r$

$$\frac{m}{2}\dot r^2 - \underbrace{mg\frac{R^2}{r}}_{U(r)} = E \qquad (4.11)$$

2. Integral: $(t_0 = 0)$

$\dot r = \frac{dr}{dt}$

$$t = \int_{R}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + mg\frac{R^2}{r}\right)}} \qquad (4.12)$$

R (von Erde bei $t=0$)

- parabolische / 2. kosmische Fluchtgeschwindigkeit v_0:

$$\boxed{v(r\to\infty) = 0 \overset{\wedge}{\underset{(4.11)}{=}} E = 0}$$

aus EES (4.11) mit $r = R$

$$\boxed{v_0 = \dot r(0) \underset{E=0}{=} \sqrt{2gR}} \qquad (4.13)$$

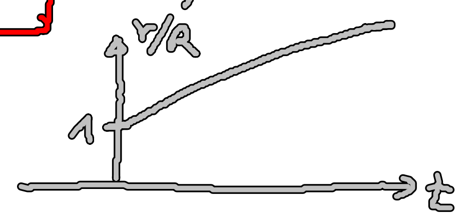
$$= 11{,}2\,\frac{km}{s}$$

Erde: $R \approx 6378$ km

aus (4.12)

$$t \overset{(4.13)}{\underset{E=0}{=}} \int_R^{r(t)} \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{r}{R}}\,dr = \frac{2}{3}\frac{1}{v_0\sqrt{R}}\, r^{3/2}\Big|_R^{r(t)} = \frac{2}{3}\frac{1}{v_0\sqrt{R}} \times \left[r^{3/2}(t) - R^{3/2}\right]$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{r(t) = R\left[1 + \frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t\right]^{2/3}} \qquad (4.14)$$



mit $\dot r(t) = \dfrac{v_0}{\left[1 + \frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t\right]^{1/3}}$

$\longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty$

- a) aus b): $\frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t \ll 1$: Taylorentw. von (4.14) mit (4.13)

$$\boxed{r(t) = \underbrace{R + v_0 t - \frac{g}{2}t^2}_{(4.8)} + \underbrace{\frac{1}{6}\frac{v_0^3}{R^2}t^3}_{\text{Korrektur}} + \ldots} \qquad (4.15)$$

4.3 Bewegung im geschw. abh. Kraftfeld

· Löse: $m\ddot{x} = F(\dot{x}) \xrightarrow[\dot{x} = v]{} m\dot{v} = F(v)$ ... Dgl. 1. Ordnung $v(t)$

– Trennung der Variablen: $\dot{v} = \frac{dv}{dt} \longrightarrow t = m\int_{v_0 = v(0)} \frac{dv}{F(v)}$

$\longrightarrow v(t)$ (4.16)

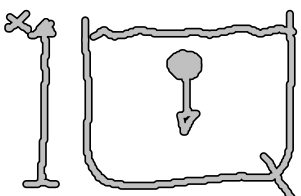
– 2. Integral: $x(t) = \int_0^t dt' \, v(t') + x_0$

x_0, v_0 ... Integrationsvariablen

· in der Regel: $t \longrightarrow \infty$ schleichende Bewegung: $m\dot{v} = K(v) = 0$

$\longrightarrow v_\infty$ ... Grenzgeschw.

a) Freier Fall mit Stokesscher Reibung



η ... Viskosität

· $m\dot{v} = -mg - \beta v$ (4.17) $\beta = 6\pi\eta a$ ... Kugel

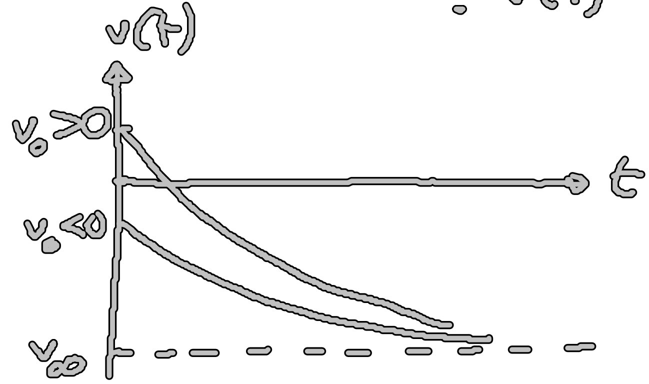
· $F(v) = 0 \longrightarrow \boxed{v_\infty = -\frac{mg}{\beta}} < 0$ (4.18)

· $t = -m\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mg + \beta v} \underset{(4.18)}{=} -\frac{m}{\beta}\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{\underbrace{\frac{mg}{\beta}}_{-v_\infty} + v} = -\frac{m}{\beta}\ln\frac{-v_\infty + v(t)}{-v_\infty + v_0}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_\infty + (v_0 - v_\infty)\, e^{-t/\tau} \\ \tau &= \frac{m}{\beta} \quad \text{... Relaxationszeit} \end{aligned}} \quad (4.19)$$

! $v(t) \longrightarrow v_\infty$, $t \to \infty$

$1P = 1 \frac{g}{cm\,s}$



Bsp: $\eta(H_2O) = 10^{-3} \frac{kg}{ms}$ $(= 0{,}01 P)$

$a = 10^{-6} m$

$\varrho = 1 \frac{g}{cm^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ $\Big\}$ $m = \varrho \frac{4\pi a^3}{3} \approx 4 \cdot 10^{-15} kg$

$\longrightarrow \tau = \frac{m}{6\pi\eta a} \approx 10^{-9} s$!

- Anwendung: mikroskop. Modell für Ohmsches Gesetz

$-mg \longrightarrow eE$ ... angel. Feld „beschl." $e^- \xrightarrow[(4.18)]{} \boxed{v_\infty = \frac{eE}{\beta}}$ (4.20)

elektr. Stromdichte: $j = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dichte der} \\ \text{Ladungsträger}}}{n} e v_\infty =: \sigma E$ ... Ohmsches Gesetz

$$\xrightarrow[(4.20)]{} \boxed{\sigma = \frac{ne^2}{\beta} \underset{(4.19)}{=} \frac{ne^2\tau}{m}} \quad (4.21)$$

... spezifische Leitfähigkeit

Mechanismus für Reibung

$\tau = \frac{m}{\beta}$! ... Reibung β durch Stöße von $\bar{e}$ mit Phononen (Gitterschwingungen) & Verunreinigungen im Metall

$\longrightarrow$ τ ... mittlere stoßfreie Zeit

b) Freier Fall mit Newtonscher Reibung (Luftwiderstand)

- Löse: $m\dot{v} = -mg + \gamma v^2 \longrightarrow$ Übungen

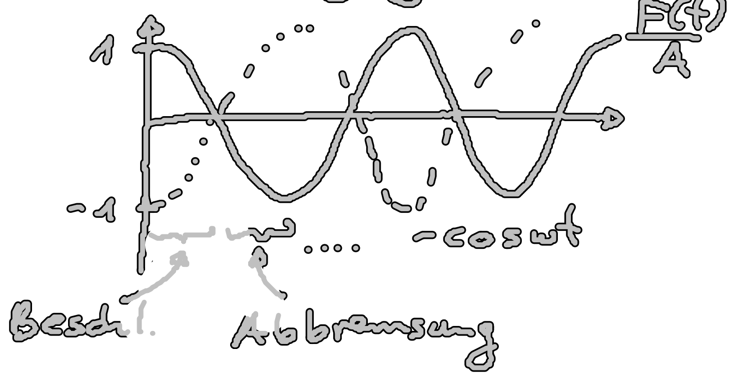
4.4. Reine zeitabh. Kraft

- Löse: $m\ddot{x} = F(t) \xrightarrow{\text{1. Integral}} \dot{x}(t) - v_0 = \frac{1}{m} \underbrace{\int_0^t F(t')dt'}_{\text{Kraftstoß}}$ (4.22)

$$\xrightarrow{\text{2. Integral}} x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m} \int^t dt' \int^{t'} dt'' \, F(t'') \quad (4.23)$$

• Bsp: $F(t) = A\cos\omega t$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad x = \underbrace{x_0 + v_0 t}_{\text{gleichf. Bewegung}} + \frac{A}{m\omega^2}\left(1 - \underbrace{\cos\omega t}_{\text{in Gegenphase zur erregenden Kraft}}\right)$$



5. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

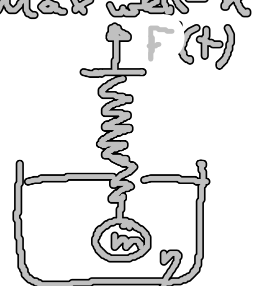
• volles Problem:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ges}(x,\dot{x},t) \\ \text{mit } F_{ges}(x,\dot{x},t) &= \underbrace{-fx}_{\text{harm./Federkraft}} \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\text{Stokes'sche Reibung}} + \underbrace{F(t)}_{\text{eingeprägte Kraft}} \end{aligned}} \qquad (5.1)$$

• Realisierung

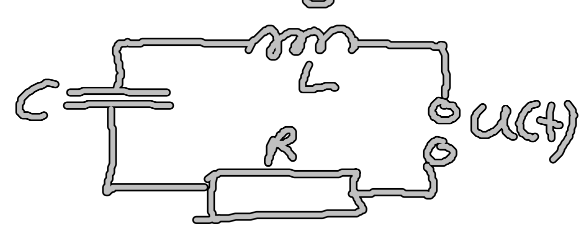
mechanisch

Maxwell-Körper



elektromagnetisch

Schwingkreis



$$\underbrace{L\ddot{Q}}_{\text{„Masse"}} + \underbrace{R\dot{Q}}_{\text{„Reibg"}} + \underbrace{\frac{1}{C}}_{\text{„Feder"}} Q = U(t) \qquad \dot{Q} = I(t)$$

- harm. Oszillator: – fundamentale Bedeutung in der Physik
  – eines der wenigen exakt lösbaren Probleme
- dient zur: Veranschaulichung von fundamentalen Konzepten
- <u>mathem. Details</u>:

(5.1): lineare Dgl. 2. Ordnung in Zeit $\underbrace{\text{für } x(t)}$ mit Inhomogenität $[F(t)]$

↳ Superpositionsprinzip

↳ 2 Integrationskonst.

$x_{part}(t)$

allg. Lsg:

$$x(t) = \underbrace{a\,x_1(t) + b\,x_2(t)}_{x_{hom}(t)} + \underbrace{x_{part}(t)}_{\text{eine partikuläre Lsg}} \quad (5.2)$$

Lsg. der homog. Dgl.

wobei $x_1(t)$, $x_2(t)$ linear unabh. sind