

• 4.3 a) freier Fall mit Stokescher Reibung

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta a} \quad \left. \begin{array}{l} \eta(\text{H}_2\text{O}) = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}} \\ a = 10^{-6} \text{m} \\ \rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{array} \right\} m = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \approx 4 \cdot 10^{-15} \text{kg}$$

$$\rightarrow \underline{\tau \approx 10^{-7} \text{s}}$$

## 5. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

• volles Problem:  $m \ddot{x} = -f x - \alpha \dot{x} + F(t)$  (5.1)

### 5.1 Ungedämpfte freie Bewegung

a) Lösung:  $m \ddot{x} + f x = 0$  (5.3)

Lsg:

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m}$$

... Eigenfrequenz

$$\left. \begin{array}{l} A^2 = a^2 + b^2 \\ \tan \varphi = \frac{b}{a} \end{array} \right\} \begin{cases} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{cases} = A \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

A ... Amplitude } der Schwingung  
 $\varphi$  ... Phase }

(5.4)

b) komplexe Darstellung:  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  (5.5)  $i = \sqrt{-1}$

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Linearität}} \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (5.6)$$

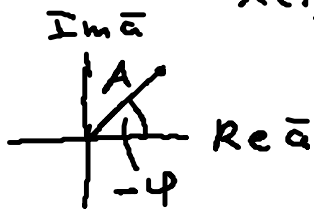
• sys. Lsg. durch Ansatz:  $z(t) = e^{\lambda t}$  in (5.6)

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \boxed{\lambda^2 = -\omega_0^2} \quad \dots \text{„charakt. Polynom“}$$

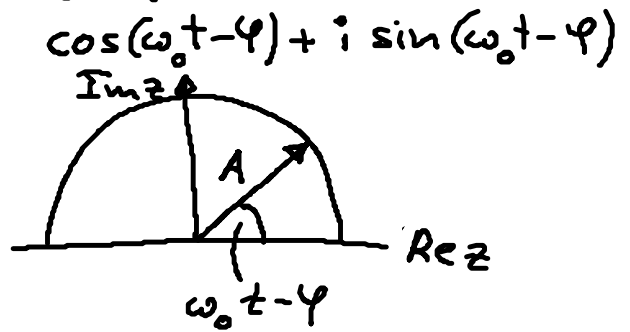
$$[\sqrt{-1} = i] \quad \boxed{\lambda = \pm i \omega_0} \quad (5.7)$$

$$\rightarrow z(t) = \bar{a} e^{i\omega_0 t} + \bar{b} e^{-i\omega_0 t}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) \stackrel{\text{o.B.d.A.}}{=} \operatorname{Re} [A e^{i(\omega_0 t - \varphi)}] \quad (5.8)$$



$$(i) \bar{a} = A e^{-i\varphi} \\ \bar{b} = 0$$

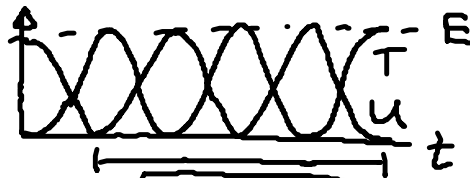


(ii) i.a. bestimme  $\bar{a}, \bar{b}$  so, daß Anfangsbed. erfüllt sind

c) Energiebilanz: ( $\varphi=0 \rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t$ )

$$\bullet E = T + U \quad \text{mit} \quad U = \frac{f}{2} x^2 \rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = -fx, \quad f = m\omega_0^2$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t \\ U &= \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t \end{aligned} \right\} E = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \quad (5.9)$$



$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

... Periodendauer (5.10)

Trick

$$\bullet \text{Mittelwerte: } \langle T \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt T(t) \stackrel{(5.9)}{=} E \underbrace{\frac{1}{\omega_0 t_0} \int_0^{2\pi} d(\omega_0 t) \sin^2 \omega_0 t}_{\frac{1}{2}} = \frac{E}{2} \quad (SM)$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt U(t) = \frac{E}{2}$$

... Gleichverteilung im Mittel!

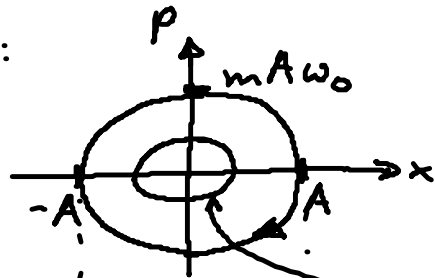
$$[\text{NB. Trick } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \frac{1}{2}]$$

d) Bewegung im Phasenraum: x-p-Ebene

- p konjugierte Koord. zu x  
 $\hookrightarrow [px] = [Et] = \int \dots$  Wirkung

- hier:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$   
 $p(t) = m \dot{x}(t) = -m A \omega_0 \sin(\omega_0 t)$  } Parameterdarstellung einer Ellipse

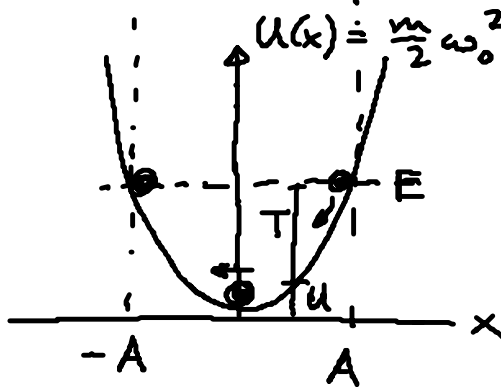
- Phasenporträt:



- period. Bewegung  
 $\rightarrow$  geschlossene Kurve
- Umlaufzeit:  $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

kleineres A, E

- vgl:



- Anharmonischer Oszillator: qualitatives Phasenporträt  $\rightarrow$  Üb.



- Wirkung einer Bewegung:

$$S := \oint p(x) dx = \int_0^{t_0} p(x) \dot{x} dt \quad (5.12)$$

ein Umlauf eingeschlossene Fläche im Phasenraum

- harm Oszillator:  $S = \underbrace{\pi m \omega_0 A^2}_{\substack{\text{Fläche} \\ \text{Ellipse}}} = 2\pi \frac{E}{\omega_0} = E t_0! \quad (5.13)$

- Klassik: S kontinuierlich

$$QM: \left. \begin{array}{l} S_n = 2\pi h (n + \frac{1}{2}), \quad n = 0, 1, \dots \\ \xrightarrow{E = S/h_0} \\ (5.13) \quad E_n = h \omega_0 (n + \frac{1}{2}) \end{array} \right\} (5.14)$$

Plancksche Quantenhypothese

Bohr:  $S_n$  auch für  $e^-$  im Atom!

## 5.2 Gedämpfter, freier harm. Oszillator

$$(5.1) \rightarrow m \ddot{x} + \underbrace{\alpha \dot{x}}_{\substack{\text{nicht} \\ \text{konserv.} \\ \text{System}}} + f x = 0 \quad \xrightarrow{x = \operatorname{Re} z} \quad \ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (5.16)$$

$f = m\omega_0^2$   
 $\gamma = \frac{\alpha}{2m}$

$(5.15) \quad [\gamma] = \frac{1}{s}!$

• Lsg.-ansatz:  $z(t) \sim e^{\lambda t}$  in (5.16)

→ charakt. Polynom:  $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$

→  $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  (5.17)

allg. Lsg:  $z(t) = \bar{a} e^{\lambda_1 t} + \bar{b} e^{\lambda_2 t}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$  (5.18)

• Erinnerung: Energiebilanz:  $\frac{d}{dt}(T+U) = F_{\text{diss}} \dot{x} = -\alpha \dot{x}^2$  (2.25)

• Fallunterscheidung

a) geringe Dämpfung:  $\gamma < \omega_0$

$\sqrt{-1} = i \rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega_d, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$  (5.19)

(5.18)  $\rightarrow$  reelle Lsg:

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = \operatorname{Re} [A e^{-\gamma t} e^{i(\omega_d t - \varphi)}]$$

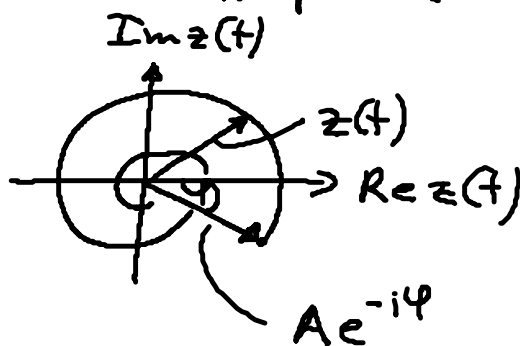
$$\bar{a} = A e^{-i\varphi}$$

$$\bar{b} = 0$$

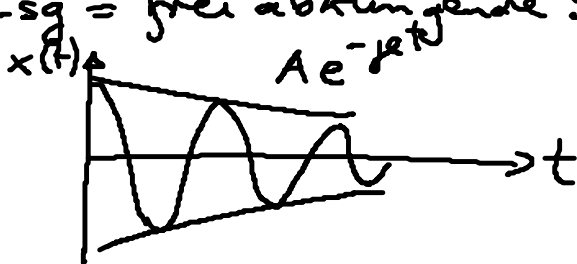
$$= A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \varphi)$$

gedämpfte period. Schw. (5.20)  
Amplitude

• Zeigerdiagramm für komplexe Lsg:



• reelle Lsg = frei abklingende Schwingung mit  $\omega_d$ :



2 Kenngrößen: 1. Relaxationszeit/Abklingzeit:  $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{\alpha}$  (5.21)

2. Oszillatorgüte:

$$Q = \frac{2\pi \text{ mittlere Energie: } \frac{\omega_d}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_d} (T+U) dt}{\text{Energieverlust pro Periode: } \alpha \int_0^{2\pi/\omega_d} x^2 dt} \quad (5.22)$$

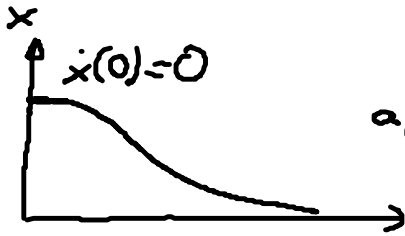
hohe Güte:  $\tau \gg \frac{1}{\omega_0}$ :  $Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}}{\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \omega_d^2 \int_0^{2\pi/\omega_d} \cos^2(\omega_d t - \varphi) dt}$

$$\omega_d \approx \omega_0 \rightarrow Q = \frac{m \omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 \tau}{2} \gg 1 \quad (5.23)$$

b) starke Dämpfung:  $\gamma > \omega_0 \rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$  rein exp. Abfall:  $x(t) = a e^{-(\gamma - \sqrt{\dots})t} + b e^{-(\gamma + \sqrt{\dots})t}$

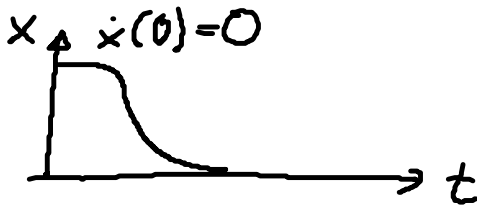
$a, b \in \mathbb{R}$



aperiodische Dämpfung  
Kriechbewegung

c) aperiodischer Grenzfall:  $\gamma = \omega_0 \rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma$

Mathe  $x(t) = a e^{-\gamma t} + b t e^{-\gamma t}$  (s. 25) Lsg. antwortet



- Anwendung: ideal für Meßgeräte  
ideale Dämpfung, klingt am schnellsten ab:  
 $\gamma > \gamma - \sqrt{\dots}$   
 $\rightarrow$  Zeiger geht am schnellsten gegen Meßwert