- Interessenten für Skript-Erstellung:

  Treffen: Fr. 16.11.07, $11^{45}$ s.t. EW731

## d) Der Formalismus der linearen Antwort II

- Es galt: $\hat{L}(t)\, G_c(t-t') = \underbrace{\delta(t-t')}_{\delta\text{-Kraft}}$ , $\hat{L}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2$ (5.61)

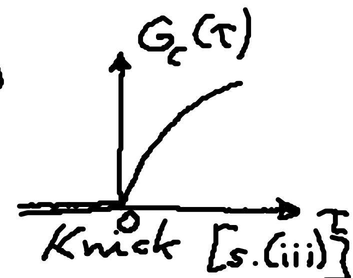
  $\int \delta(t-t')\,dt' = 1$ ... $\delta$-Kraftstoß

- Bestimmung der Greenschen Fkt. aus Stetigkeits- und Sprungbed.:

  (i) Kausalität: $\boxed{G_c(\tau) = 0,\ \tau < 0}$  $\tau = t - t'$

  (ii) Stetigkeit: $G_c(\varepsilon) - \underbrace{G_c(-\varepsilon)}_{=0\ [\text{s. (i)}]} = 0,\ \varepsilon \to 0$

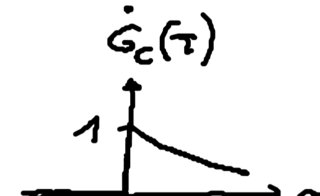
  $\longrightarrow \boxed{G_c(0) = 0}$




  (iii) Sprungbed.:

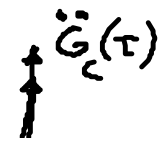
$$(5.61):\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\tau \Big[\underbrace{\ddot{G}_c(\tau)} + \underbrace{2\gamma \dot{G}(\tau)}_{\substack{2\gamma[G_c(\varepsilon) - G_c(-\varepsilon)] \\ \to 0,\ \varepsilon \to 0}} + \underbrace{\omega_0^2 G_c(\tau)}_{\to 0,\ \varepsilon \to 0} - \underbrace{\delta(\tau)}_{1}\Big] = 0$$

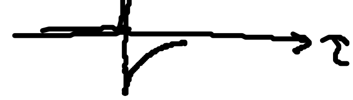
$$\longrightarrow \dot{G}_c(\varepsilon) - \underbrace{\dot{G}_c(-\varepsilon)}_{=0\ [\text{s. (i)}]} = 1$$




$\xrightarrow{\varepsilon \to 0}$ $\boxed{\dot{G}_c(+0) = 1}$

$\longrightarrow$






vgl: $\delta$-Kraftstoß: $1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\frac{F}{m}}_{\delta(\tau)} d\tau \overset{(2.1)}{=} \frac{1}{m}\big[p(\varepsilon) - \underbrace{p(-\varepsilon)}_{0}\big]$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \boxed{1 = v(0) = \dot{x}(0)}$$

(iv) $\tau > 0$: $G_c(\tau)$ löst homog. Dgl.

(i)–(iv): kausale Greensche Fkt. (5.62)

$$\boxed{G_c(t-t') = \underbrace{\Theta(t-t')}_{(i)} \; \underbrace{\frac{1}{\omega_d}}_{(iii)} \; \underbrace{e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_d (t-t')]}_{(ii),\,(iv):\ (5.20)\ \text{mit}\ \varphi = \frac{\pi}{2}}}$$

· **Bemerkungen**

(i) $\delta$-Kraft: $\delta(t-t') \overset{(5.56)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-t')}}_{\xrightarrow{\text{Antwort}}\ \chi(\omega)\frac{1}{2\pi}e^{i\omega(t-t')}\ (*)} d\omega$ … kont. Überlagerung von harm. Kräften der Stärke $\frac{1}{2\pi}$

(*) vgl. (5.30)

Linearität der DGl.: Antwort auf $\delta(t-t')$ $\xrightarrow{\text{überlagere } (*)}$

$$\boxed{G_c(t-t') = \int \chi(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi} \equiv \chi(t-t')} \quad (5.63)$$

… Fourier-Integral-Darstellung von $G_c(t-t')$

dynam. Suszeptibilität $\chi(\omega) \equiv$ Fourier-Transformierte von $G_c(t-t')$

$$\boxed{G_c(\omega) = \chi(\omega)} \quad (5.64)$$

NB: Berechne (5.63) durch Integration im Komplexen

[ Einschub: Fouriertransf. (FT)

vgl. Vektoren: $\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i$ mit $a_i = \underline{e}_i \cdot \underline{a}$, $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$

hier: Basis für $f(t)$ ?

definiere: Fouriertransf. von $f(t)$

$$\hat{f}(\omega) \equiv f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt \; \underbrace{\text{"} = \langle e^{i\omega t} | f(t) \rangle \text{"}}_{QM}$$

dann gilt: (o.B.)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Faltungssatz der FT:

$$f(\omega)\, g(\omega) \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')\, g(t')\, dt' \quad ]$$

(ii) allgemeine Kraft:

$$\hat{L}(t)\, x(t) = \hat{F}(t)$$

$$= \int x(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \qquad = \int \hat{F}(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\longrightarrow \int \underline{\chi^{-1}(\omega)\, x(\omega)}\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int \underline{\hat{F}(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\boxed{\chi^{-1}(\omega)\, x(\omega) = \hat{F}(\omega)} \quad \text{vgl. (5.30)}$$

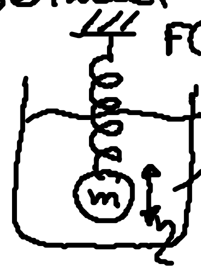
$$\longrightarrow x(\omega) = \chi(\omega)\, \hat{F}(\omega) \xrightarrow[\text{der FT}]{\text{Faltungssatz}}$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\chi(t-t')}_{G_c(t-t')}\, \hat{F}(t')\, dt'}$$

vgl. (5.42)

(iii) <u>Ausblick</u>: Fluktuations-Dissipations-Theorem

Experiment



$F(t)=0$

Zitterbewegung der Kugel aufgrund therm. Stöße der Flüssigkeitsmol.

$\longrightarrow$ mittlere kinet. Energie: $\frac{m}{2}\langle v^2\rangle_E = \frac{k_B T}{2}$

" pot. " $\frac{m}{2}\omega_0^2\langle x^2\rangle_E = \frac{k_B T}{2}$

wobei $\langle \dots \rangle_E$ ... Mittel über ein ganzes Ensemble von harm. Oszillatoren

charakt. Zitterbewegung durch:

$C(t) = \langle x(t)\, x(0)\rangle_E$ ... „zeitl. Autokorrelationsfkt. der Auslenkung $x(t)$"

Führe ein: $C(\omega) = \int C(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

(5.65)

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\underbrace{C(\omega)}_{\text{Fluktuationen}} = -\frac{2}{m}\frac{k_B T}{\omega}\underbrace{\chi''(\omega)}_{\text{Absorption/ Dissipation}}}$$

... Fluktuations-Dissipations-theorem

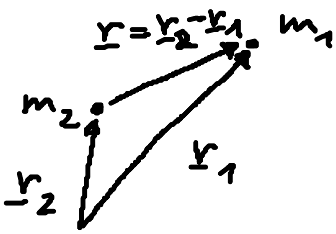
Fluktuationen $\longleftrightarrow$ Absorption/ Dissipation

Licht-streu-exp. Resonanzexp.

# 6. Bewegung im Zentralfeld

## 6.1. Problemstellung

· Geometrie:




Ww zwischen $m_1$ und $m_2$: Zentralpotential: $U(\underline{r}) = U(r)$

$|\underline{r}| = r$ ! (6.1)

$$\longrightarrow \underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\underline{\nabla} r = -\frac{\partial U}{\partial r}\underline{e}_r$$

$\underline{r}/|\underline{r}|$

„Zentralkraftfeld"
[vgl. Kap. 2.3]

· Bsp: (i) Keplerproblem: $U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$
$m_1 = m_{P(lanet)}$
$m_2 = m_{S(onne)}$

(ii) Streuung: Komet an Erde "

} Gravitationspotential (3.3)

(iii) Wasserstoffatom: $U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$

(iv) Rutherfordstreuung: $U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$

} Coulomb potential (3.11)

→ α-Teilchen [Kernladungszahl $Z_1 = 2$ ... Heliumkerne] gestreut an Goldfolie [$Z_2 = 79$]

→ Nachweis: Atom = massiver Atomkern & $e^-$-Wolke

→ Atomphysik

(v) Oszillator: $U(r) = \frac{1}{2} f r^2$ ... Schwingungsenergie eines 2-atomiges Molekül

## 6.2. Reduktion zum Einteilchen-Problem

- Zweiteilchenproblem (→ Kap 2)

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \\ &(2) \quad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \end{aligned}\right\} \quad (6.2)$$

· Entkoppeln?

„Schwerpkt. Koordinate": [→ Kap. 2] (6.3)

Relativ Koord.

$$\left.\begin{aligned} \underline{R} &= \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \underline{r} &= \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \end{aligned}\right\} \xleftrightarrow{\text{o.B.}} \left\{\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r} \end{aligned}\right. \quad (6.4)$$

· <u>Schwerpkts. bewegung</u>

$$(1)+(2): \quad \text{l.S.}: \quad \underbrace{(m_1+m_2)}_{M}\ddot{\underline{R}}$$

$$\text{r.S.}: \; -\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|) - \underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{-\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)} = 0$$

$$\longrightarrow \quad M\ddot{\underline{R}} = 0 \quad (6.5)$$

$$\underline{R} = \underline{a}t + \underline{b}$$

$\longrightarrow$ kräftefreie Bewegung des Gesamtsystems mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$

· <u>Relativbewegung</u>

in (6.2): $\frac{1}{m_1}(1) - \frac{1}{m_2}(2) \longrightarrow$

$$\underbrace{\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2}_{\ddot{\underline{r}}} = -\frac{1}{m_1}\underbrace{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{\underbrace{\underline{\nabla}_{\underline{r}}}_{\underline{\nabla}} U(\underbrace{|\underline{r}|}_{r})} + \frac{1}{m_2}\underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1-\underline{r}_2|)}_{-\underline{\nabla}_{\underline{r}}(|\underline{r}|)}$$

$$= -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\underline{\nabla} U(r)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \mu\,\ddot{\underline{r}} &= -\underline{\nabla} U(r) \quad (6.6) \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \; \ldots \text{ reduz. Masse} \quad (6.7) \end{aligned}}$$