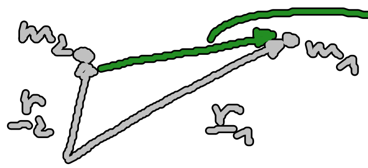
6. Bewegung im Zentralfeld



$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

6.2. Reduktion zum Einteilchen-Problem

- $$\left.\begin{aligned} (1)\quad & m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \\ (2)\quad & m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \end{aligned}\right\} (6.2)$$

- Schwerpkt. Koord. $\quad \underline{R} = \dfrac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$ (6.3)

  Rel. Koord. $\quad \underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

- $(1)+(2) \longrightarrow \underbrace{M}_{m_1+m_2} \ddot{\underline{R}} = 0 \longrightarrow \underline{R} = \underline{a}t + \underline{b}$

- <u>Relativbewegung</u>

  in (6.2) $\frac{1}{m_1}(1) - \frac{1}{m_2}(2) \longrightarrow$

$$\underbrace{\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2}_{\ddot{\underline{r}}} = -\frac{1}{m_1} \underbrace{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{\underline{\nabla}_r U(|\underline{r}|)} + \frac{1}{m_2} \underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{-\underbrace{\underline{\nabla}_{\underline{r}}}_{\underline{\nabla}} U(\underbrace{|\underline{r}|}_{r})}$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{\frac{1}{\mu} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}} \underline{\nabla} U(r)$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \mu \ddot{\underline{r}} &= -\underline{\nabla} U(r) \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ldots \end{aligned}} \begin{aligned} &(6.6) \\ &\text{reduzierte Masse} \\ &(6.7) \end{aligned}$$

... effektives Teilchen im Zentralpotential

($\hookrightarrow$ konservatives Kraftfeld)

$\longrightarrow$ Energieerhaltung [Kap. 2.4]

$\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung [Kap. 2.3] $\Big\}$ 4 Konstanten der Bewegung

Bsp: $m_1 = m_p \ll m_2 = m_S \longrightarrow \mu \approx \frac{m_p m_S}{m_S} = m_p$!

6.3 Lösung des Einteilchen-Problems

a) Auswertung der Erhaltungssätze:

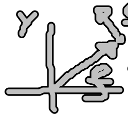
• **Drehimpuls**: [vgl. Kap. 2.3]

$$\underline{r}\times(6.6) \longrightarrow \underline{r}\times\mu\ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt}\underbrace{(\underline{r}\times\mu\dot{\underline{r}})}_{\underline{L}} - \underbrace{\dot{\underline{r}}\times\mu\dot{\underline{r}}}_{=0}$$

$$= -\underline{r}\times\underbrace{\underline{\nabla}U(r)}_{\sim\underline{e}_r \parallel \underline{r}} = 0!$$

$$\longrightarrow \underline{L} = \underline{r}\times\mu\dot{\underline{r}} = \text{konst.} = L\underbrace{\underline{e}_z}_{\text{o.B.d.A}} \quad (6.8)$$

$\underline{r}, \dot{\underline{r}} \perp \underline{e}_z \longrightarrow$ Bewegung in xy-Ebene: $\underline{r} = \underline{\rho} = \rho\,\underline{e}_\rho$ ... Zylinder-Koord. mit $z=0$



$\underline{\rho} = \rho\,\underline{e}_\rho$

$$\longrightarrow \dot{\underline{r}} = (\rho\,\underline{e}_\rho)^{\cdot} = \dot\rho\,\underline{e}_\rho + \rho\,\dot{\underline{e}}_\rho \underset{(1.4)}{=} \dot\rho\,\underline{e}_\rho + \rho\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi \quad (6.9)$$

$$\longrightarrow \underline{L} = \underline{\rho}\times\mu\dot{\underline{\rho}} \underset{(6.9)}{=} \mu\rho\dot\varphi\underbrace{\underline{\rho}\times\underline{e}_\varphi}_{\rho\,\underline{e}_z}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{L} = L\,\underline{e}_z \text{ mit } L = \mu\rho^2\dot\varphi} \quad (6.10)$$

• **Energie**: $\dot{\underline{r}}\cdot(6.6) \xrightarrow[\text{Kap. 2.4}]{} \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 + U(r) = E \quad (6.11)$

$$\text{mit } \dot{\underline{r}}^2 \underset{(6.9)}{=} \dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 \underset{(6.10)}{=} \dot\rho^2 + \frac{L^2}{\mu^2\rho^2}$$

$$(6.11) \longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\mu}{2}\dot\rho^2}_{\text{kinet. Energie: radial}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\rho^2}}_{\text{azimuthal}} + U(\rho) = E} \quad (6.12)$$

→ Umdeutung

1-dim. Bewegung mit Koord. ϱ in $U_{eff}(\varrho)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\mu}{2}\dot{\varrho}^2 + U_{eff}(\varrho) = E \\ &U_{eff}(\varrho) = U(\varrho) + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\varrho^2}} \end{aligned}} \quad (6.13)$$

„Zentrifugalpotential": abstoßend, $\to \infty$, $\varrho \to 0$

Bewgl. zu (6.13)

$\frac{d}{dt}(6.13)/\dot{\varrho}$

$$\boxed{\mu\ddot{\varrho} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \varrho} = \underbrace{\frac{L^2}{\mu\varrho^3}} - \frac{\partial U}{\partial \varrho}} \quad (6.14)$$

„Zentrifugalkraft"
= Scheinkraft, treibt Körper weg vom Zentrum (vgl. Karussell)

b) Lösung

- folgt aus (6.10) → $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu\varrho^2}$ (6.15)

(6.13) → $\dot{\varrho} = \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{eff}(\varrho)]}$ (6.16)

- Integration von (6.16): $\dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{dt}$ & Sep. der Variablen

$$\boxed{\begin{aligned} &t - t_0 = \int_{\varrho_0 = \varrho(t_0)}^{\varrho} \frac{d\varrho'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{eff}(\varrho')]}} \longrightarrow \varrho(t) \\ &\varrho(t) \text{ in } (6.15) \longrightarrow \varphi(t) \end{aligned}} \quad (6.17)$$

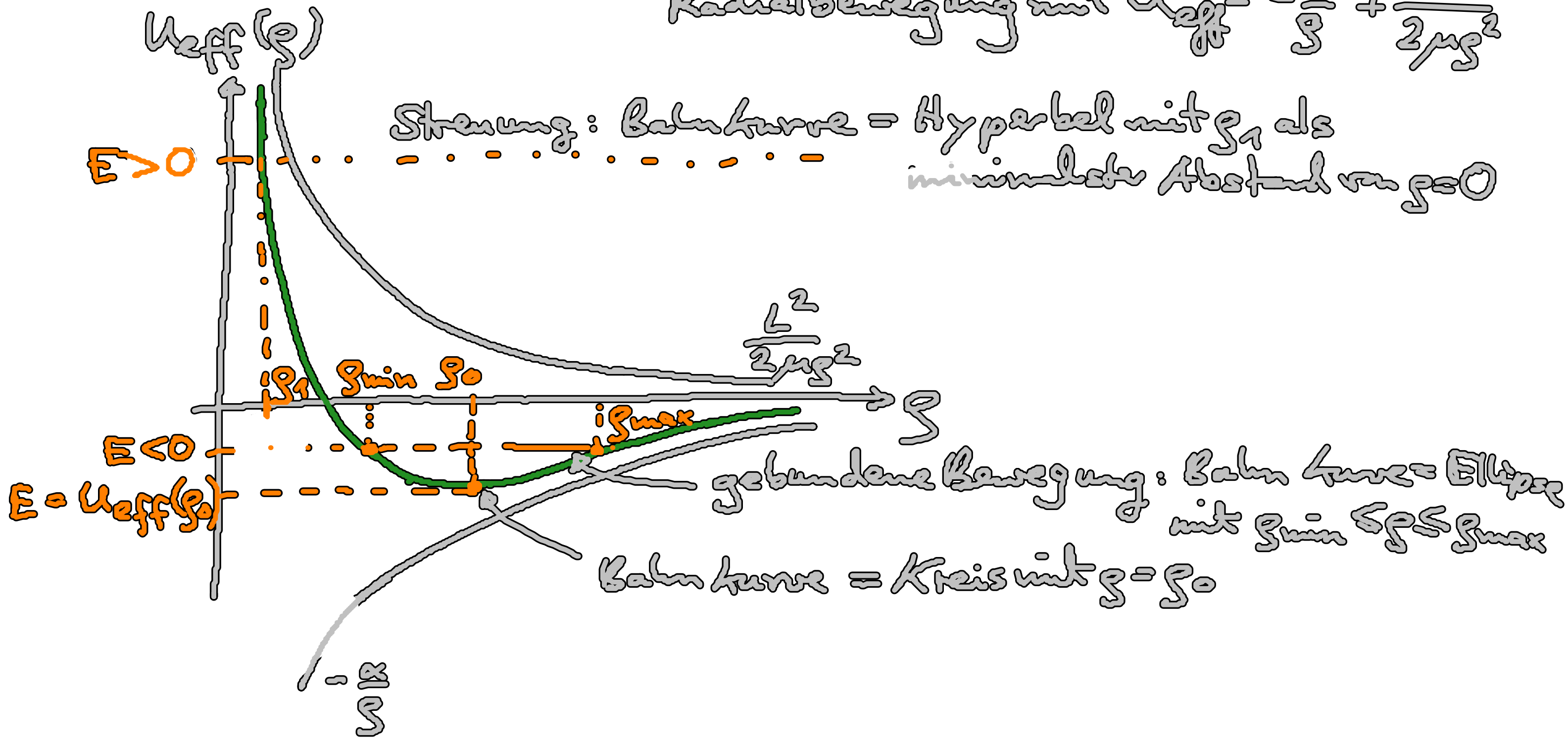
- Gestalt der Bahnkurve: $\left.\begin{matrix}\rho(t)\\ \varphi(t)\end{matrix}\right\} \rightarrow \rho = \rho(\varphi)$

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dt}{d\rho} = \frac{(6.15)}{(6.16)} \xrightarrow{\text{Integration}} d\varphi = \ldots\, d\rho$$

$$\boxed{\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{L/\rho'^2}{\sqrt{2\mu\left[E - U_{eff}(\rho')\right]}}\, d\rho' \;\longrightarrow \rho(\varphi)} \quad (6.18)$$

c) <u>Qualitative Diskussion</u>: für Keplerproblem [s. Kap. 6.4]

Radialbewegung mit $U_{eff} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$



6.4. <u>Keplerproblem</u>

- Potential: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha = \begin{cases} \gamma m_1 m_2 & \ldots \text{ Grav. potential} \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} & \ldots \text{ Coulombpotential} \end{cases}$

$\alpha > 0$ ... anziehendes Pot.

(< 0 ... abstoßendes Pot.)

a) Lösung und Diskussion

- Bahnkurve: (6.18), $\varphi_0 = 0 \longrightarrow \varphi = \int \frac{L/\rho^2}{\sqrt{2\mu\Big[E \underbrace{+\frac{\alpha}{\rho} - \frac{L^2}{2\mu\rho^2}}_{-U_{eff}(\rho)}\Big]}}\,d\rho$

<u>Stammfkt:</u>

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{\rho}, \quad du = -\frac{d\rho}{\rho^2} \\ a &= \frac{2\mu E}{L^2}, \quad b = \frac{\mu\alpha}{L^2} \end{aligned}\right\} \varphi = -\int \frac{du}{\sqrt{a + 2bu - u^2}} \underset{\text{o.B.}}{=} \arccos\frac{b-u}{\sqrt{b^2+a}} + \pi$$

$$\Longrightarrow \varphi - \pi = \arccos\left[\frac{\frac{\mu\alpha}{L^2} - \frac{1}{\rho}}{\sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}}\right] \quad (6.19)$$

- Führe ein: (6.20)

$$\left.\boxed{\begin{aligned} &\text{Parameter: } p = \frac{L^2}{\mu\alpha} \\ &\text{Exzentrizität: } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \end{aligned}}\right\} \xrightarrow{(6.19)} \boxed{\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}} \quad (6.21)$$

... „Kegelschnitt" in Polarkoord.

- <u>mögliche Bahnkurven</u>

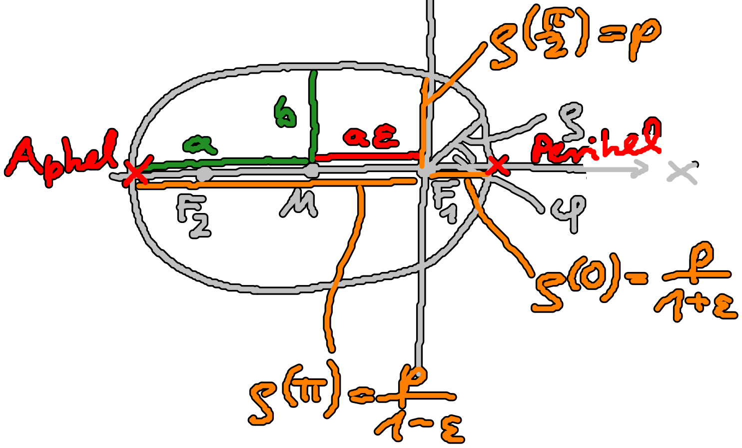
(1) $\boxed{\varepsilon = 0, \quad E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}}$ ... Kreis: $\rho = p$

(2) $\boxed{\varepsilon < 1, \quad E < 0}$ ... Ellipse

<u>kartes. Koord</u>

$$\left.\begin{aligned} \text{mit } \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{o.B.}]{(6.21)} \boxed{\begin{aligned} &\frac{(x+a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\text{Halbachsen: } a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \\ &\qquad\qquad\quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \end{aligned}} \quad (6.22)$$

y



F_i ... Brennpkte

F_1 ... Sonne

M ... Mittelpkte

$a\varepsilon = |MF_1| \to 0, \quad \varepsilon \to 0$

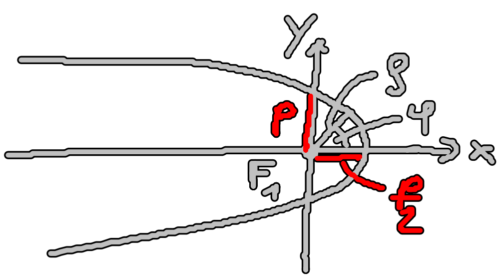
ε bestimmt Abweichg vom Kreis $\hat{=}$ Exzentrizität

Perihel: sonnennächste Pkt

Aphel: " fernste Pkt

(3) $\boxed{\varepsilon = 1, \; E = 0}$ ... Parabel

Kartes. Koord. $\xrightarrow[0.5]{(6.21)}$ $x = -\frac{1}{2p} y^2 + \frac{p}{2}$ (6.23)



F_1... Brennpkt

" Bahn eines Massekörpers der tangential von Erdoberfläche abgeschossen wird und gerade dem Grav. pot. entkommt. $[v_4 = \sqrt{2gR} \; (4.13)]$