Interessenten für Skripterstellung: bitte nach der Vorlesung melden

6.4. Das Keplerproblem

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Parameter: } p = \frac{L^2}{\mu\alpha}\\ &\text{Exzentrizität: } \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}\end{aligned}} \quad (6.20)$$

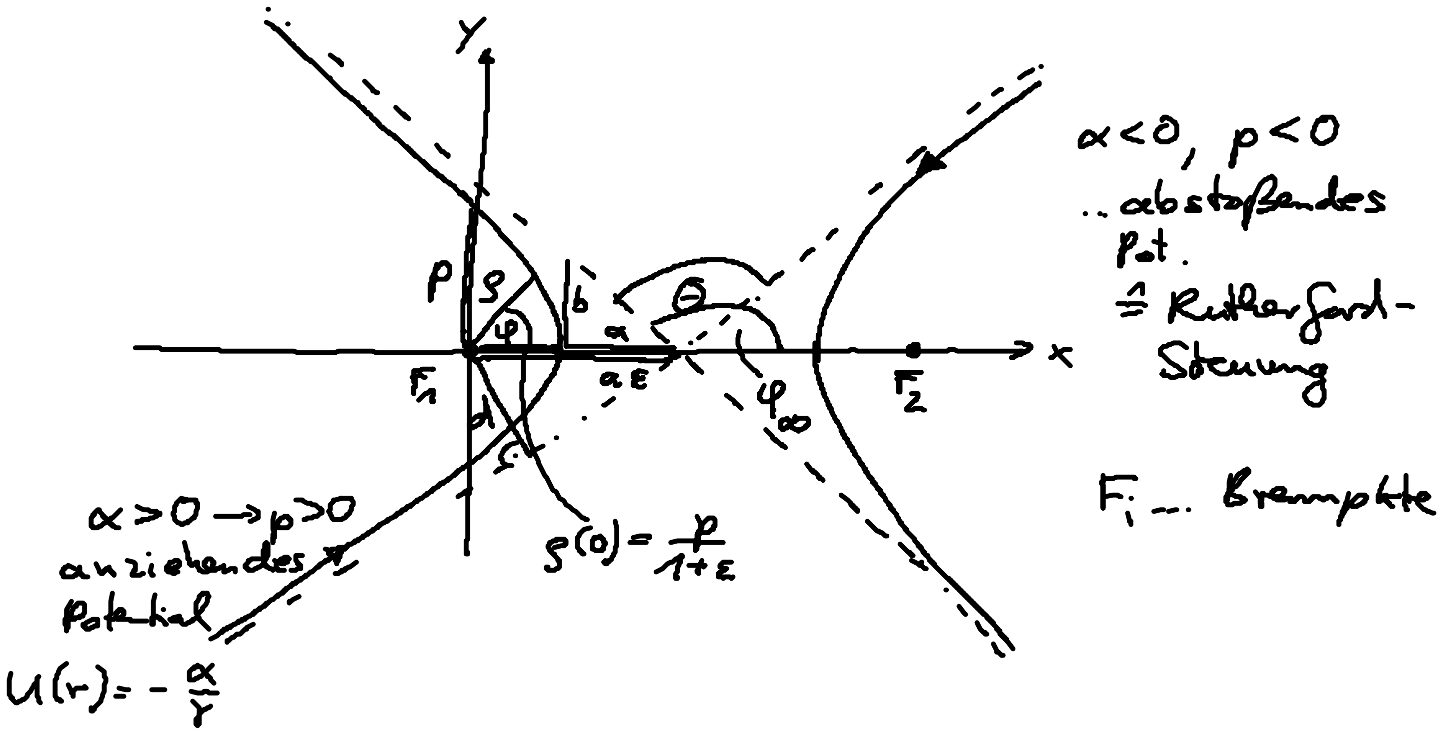
$$\boxed{\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}} \quad (6.21)$$

„Kegelschnitt"

(4) $\boxed{\varepsilon > 1,\ E > 0}$ ... Hyperbel, „Streuung" eines Kometen an der Erde/Sonne

$$\rho, \cos\varphi \xrightarrow[\text{o.B.}]{(6.21)} \text{kartes. Koord: } \frac{(x-a\varepsilon)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.24)$$

"Halbachsen": $a = \frac{p}{\varepsilon^2-1}$, $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$



Streuung

Asymptoten: $\varrho \to \infty \longrightarrow \cos\varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}$ (vgl. (6.21))

Ablenkungs/Streuwinkel: $\Theta = \pi - 2(\pi - \varphi_\infty) = 2\varphi_\infty - \pi$

Stoßparameter: d

$d(\Theta)$? $\quad d = a\varepsilon \underbrace{\sin(\pi-\varphi_\infty)}_{-\sin(\varphi_\infty-\pi)=\sin\varphi_\infty} \overset{\varepsilon=-\frac{1}{\cos\varphi_\infty}}{=} -a\tan\varphi_\infty = -a\tan\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

$$= a\cot\frac{\Theta}{2}$$

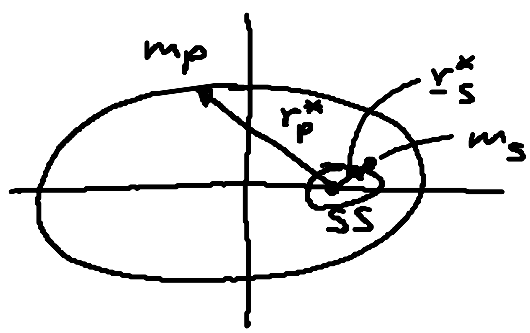
mit $a = \frac{p}{\varepsilon^2-1} \overset{(6.20)}{=} \frac{\alpha}{2E} \longrightarrow \boxed{d(\Theta) = \frac{|\alpha|}{2E}\cot\frac{\Theta}{2}}$ (6.25)

b) Keplersche Gesetze

- $m_2 = m_S$ ... Sonne
  $m_1 = m_P$ ... Planet (6.4)

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_S = \underline{R} - \frac{m_P}{M}\underline{r} \xrightarrow{SS} \underline{r}_S^* = -\frac{m_P}{M}\underline{r}$$

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_P = \underline{R} + \frac{m_S}{M}\underline{r} \xrightarrow[\underline{R}=0]{SS} \underline{r}_P^* = \frac{m_S}{M}\underline{r}$$



$$\frac{m_{Jupiter}}{m_S} \approx 10^{-3}$$

$$\frac{m_{Mond}}{m_{Erde}} \approx \frac{1}{81}$$

- Keplersche Gesetze: ($m_P \ll m_S \longrightarrow \underline{r}_S^* \approx 0$, $\underline{r}_P^* \approx \underline{r}$)

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne, in deren einem Brennpkt. die Sonne steht.

2. Flächensatz (Drehimpulserhaltung): Kap. 2.3
Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (6.26)

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten (T) sind proportional zu den Kuben der großen Halbachsen (a) der Planetenbahnen: $T^2 = c\,a^3$

Beweis zu 3. Fläche Ellipse: $A = \int_0^T \frac{dA}{dt}\,dt \underset{(2.10)}{=} \frac{L}{2\mu}\int_0^T dt = \frac{L}{2\mu}T \overset{!}{=} \pi a b$

aus (6.22): $b = \sqrt{a p} \underset{(6.20)}{=} \sqrt{\frac{a}{\mu\alpha}}\,L$

$$\longrightarrow \quad T^2 = c\,a^3 \text{ mit } c = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{\gamma m_1 m_2}$$

$$\boxed{c = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_S+m_P)} \overset{!}{\approx} \frac{4\pi^2}{\gamma m_S}} \quad (6.27)$$

... nur näherungsweise gleich für alle Planeten

c) <u>Bemerkungen</u>

- Zentralpotential: – geschlossene Bahnen für $E<0$:
  $U \sim \frac{1}{r}$, $\sim r^2$ o.B.!!
  – sonst: z.B. "Periheldrehung"

Bsp 1: Planetenbahnen um Sonne

Störungen:
1. Grav. kräfte untereinander
2. Rel. Effekte (6.28)
$$U_{eff} = -\gamma\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \underbrace{- \gamma\frac{ML^2}{mc^2}\frac{1}{r^3}}_{ART}$$
3. Abplattung der Sonne („Quadrupolmoment")

Abweichung von $\frac{1}{r}$

Merkur: $\frac{\Delta\varphi}{\text{Jahr}} \approx 57{,}191''$ $= 90\%(1.) + 10\%(2.)$

Bogensekunde

Bsp 2: Satelliten um Erde: $\approx 100\%$ Abplattung der Erde

- Planetensystem = Vielkörperproblem $\longrightarrow$ chaotisches Verhalten
- Lenzscher Vektor $\underline{M}$: weitere Konstante der Bewegung für $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

$$\boxed{\underline{M} = \mu(\dot{\underline{r}} \times \underline{r}) \times \dot{\underline{r}} - \alpha \frac{\underline{r}}{r} \quad , \quad \frac{d\underline{M}}{dt} = 0} \tag{6.29}$$

7. Nichtinertialsysteme

- Inertialsystem (IS): $\underline{r}$, Newton: $m\ddot{\underline{r}} = \underbrace{\underline{F}}_{\text{physikal. Gesamtkraft}}$ (7.1)

Kap. 1.4.: IS $\rightarrow$ IS': $\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t \longrightarrow \ddot{\underline{r}}' = \ddot{\underline{r}}$!

- Nichtinertialsystem (KS'): $\underline{r}'$, $\ddot{\underline{r}}' + \underbrace{\underline{b}_0}_{\substack{\text{Beschl. von KS'} \\ \text{relativ zu IS}}} = \ddot{\underline{r}}$ (7.2)

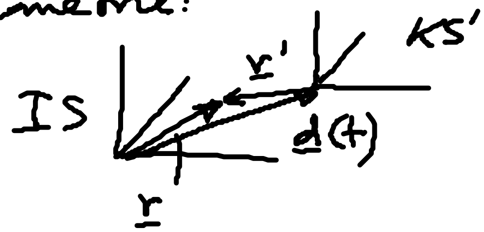
Bew.gl.? (7.2) in (7.1): $m\ddot{\underline{r}}' + m\underline{b}_0 = \underbrace{\underline{F}'}_{\substack{\text{physikal. Gesamt-} \\ \text{kraft in KS'}}}$

$$\longrightarrow \boxed{m\ddot{\underline{r}}' = \underline{F}' + \underline{F}_s' \ , \ \underline{F}_s' = -m\underline{b}_0 \ \ldots \text{Scheinkraft}} \tag{7.3}$$

... „Newton mit Scheinkraft"

7.1 Linear beschleunigte BS

• Geometrie:



$$\underline{d}(t) = \frac{t^2}{2}\,\underline{b}_0$$

denn: $\underline{r}' + \underline{d}(t) = \underline{r} \longrightarrow \ddot{\underline{r}}' + \underline{b}_0 = \ddot{\underline{r}}$

• Bsp: 1. ruhender Körper ($\ddot{\underline{r}}' = 0$, $\dot{\underline{r}}' = 0$) in KS':

freifallender Fahrstuhl: $\underline{b}_0 = \underline{g}$

$$(7.3) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{F}' = m\underline{g} \text{ ... Gewichtskraft} \\ \underline{F}_s' = -m\underline{g} \text{ ...} \end{array}\right\} \ddot{\underline{r}}' = 0\,!$$

2. Fahrer im bremsenden Auto ($\underline{b}_0$), ohne Gurt: $\underline{F}' = 0$

$$\xrightarrow{(7.3)} m\ddot{\underline{r}}' = \underline{F}_s' = -m\underline{b}_0 \longrightarrow \text{„Windschutzscheibe"}$$

7.2. <u>Rotierende BS</u>