

$$\dot{\underline{L}} = \underline{D} \quad (10.44)$$

$$\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega} \quad \underline{D} = \sum \underline{r}_v \times \underline{F}_v^{(a)}$$

b) Eulersche Gleichungen

• zeitabl. in (10.44): $\dot{\underline{L}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{IS} \stackrel{(7.11)}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times \quad (7.11)$

also (10.44) mit (7.11) & $\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega}$:

$$\left(\frac{d \underline{\Theta} \underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (\underline{\Theta} \underline{\omega}) = \underline{D}$$

$$\left(\frac{d \underline{\Theta}}{dt}\right)_{KS} = 0! \quad \underline{\Theta} \left(\frac{d \underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (\underline{\Theta} \underline{\omega}) = \underline{D} \quad (10.45)$$

• Drehimpulssatz im für perfekten Hauptachsensystem:

des starren Körpers: $\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\Theta} \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_2 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}$

$\underline{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{matrix} \dot{\omega}_i = \left(\frac{d \omega_i}{dt}\right)_{KS} \\ \left(\frac{d \underline{e}^{(i)}}{dt}\right)_{KS} = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 = D_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 = D_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 = D_3 \end{cases} \quad (10.46)$$

... Eulersche Gln.

$\rightarrow \underline{\omega} = \omega_i \underline{e}^{(i)} \quad \dots$ (körperfest)

$\xrightarrow[\text{Bgl.}]{(10.8)} \phi(t), \theta(t), \psi(t)$

Vorteil von KS: $\underline{\Theta}, \Theta_i = \text{konst.}$

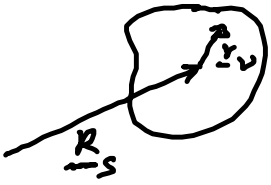
Nachteil: " : zeit abh. D_i , bestimmt durch Bewegung des starren Körpers!

Anwendungen:

c) Rotation um freie Achse (hom. Grav. feld):

Bsp: freifallender Körper: $\underline{R} = \underline{R}_S$

$$\rightarrow \underline{D} = \sum_{\nu} \underline{r}_{\nu} \times m_{\nu} \underline{g} = \underbrace{\left(\sum_{\nu} \underline{r}_{\nu} m_{\nu} \right)}_0 \times \underline{g} = 0!$$



Ges: Lsg. von (10.46) mit $\dot{\omega}_i = 0$ [vgl: $m \dot{\underline{v}} = 0 \rightarrow \underline{v} = \text{konst.}$]

$$(10.46) \left. \begin{array}{l} D_i = 0 \\ \dot{\omega}_i = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{array} \left\} \begin{array}{l} \text{allg. Fall} \\ \Theta_i \neq \Theta_j \\ i \neq j \end{array} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \omega_1 = \text{konst}, \omega_2 = \omega_3 \\ = 0 \\ \text{2 zykl. Vertausch.} \end{array}} \quad (10.47)$$

$\hat{=}$ gleichf. Rotationen um Hauptachsen mit fester Richtung im IS

Bew: $\underline{D} = 0 = \left(\frac{d\underline{L}}{dt} \right)_{IS} \rightarrow \underline{L} = \text{konst. in IS}$
 $= \Theta_1 \omega_1 \underline{e}_1^{(1)}$
 $\rightarrow \underline{e}_1^{(1)} = \text{konst. im IS ged}$

• Beh: Rotation um Hauptachse mit mittlerem Θ_i ist instabil!

d) Kräfte freier symm. Kreisel

• Löse (10.46) für $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$ & $D_i = 0$

Bsp: rot. symmetr. Körper um $\underline{e}^{(3)}$ = Figurenachse

\rightarrow Kardanscher Kreisel

\rightarrow freifallender Körper: Bsp Erde $\left(\begin{array}{l} \underline{D}^{\text{Sonne}} \approx 0 \\ \underline{D}^{\text{Mond}} = 0 \end{array} \right)$

$$(10.46) \left. \begin{array}{l} D_i = 0 \\ \Theta_1 = \Theta_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (1) \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (2) \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{\omega_3 = \omega_0} \quad (10.49)$$

(1), (2) $\xrightarrow{(10.49)}$ $\dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 = 0$ (3) mit $\boxed{\Omega = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1} \omega_0}$ (10.50)

$\dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 = 0$ (4)

$\frac{d}{dt}$ (3) & (4).

$\ddot{\omega}_1 + \Omega \omega_1 = 0 \rightarrow$

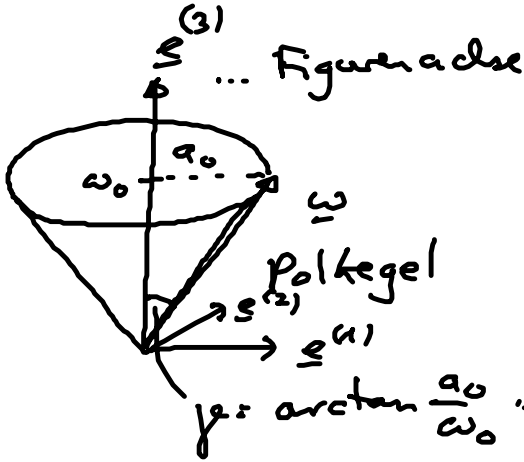
$\xrightarrow{\text{in (4)}} \boxed{\begin{aligned} \omega_1(t) &= -a_0 \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega_2(t) &= a_0 \sin(\Omega t + \varphi_0) \end{aligned}}$ (10.51)

$a_0, \varphi_0 \dots$ Integ. konst.

\dots Kreisbeweg: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = a_0^2$

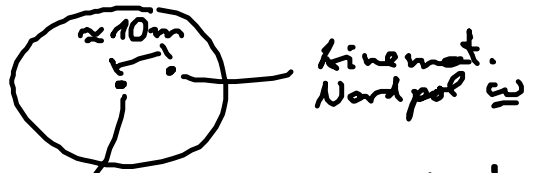
$\underline{\omega}$ präzessiert
 $\underline{\omega}$ rotiert auf Polkegel um $\underline{e}^{(3)}$
 mit Kreisfrequenz $|\Omega|$

Skizze



- Bsp: Erde

$|\Omega| = \frac{|\Theta_1 - \Theta_3|}{\Theta_1} \omega_0 = \frac{1}{300} \frac{2\pi}{\text{Tag}} = \frac{2\pi}{10 \text{ Monate}}$



real: $\Omega = \frac{2\pi}{427}$ Tage

& keine regelm. Präzession um $\underline{e}^{(3)}$

Grund: (i) Erde nicht starr: elast. Verformungen
 Verschiebungen in Atmosphäre & Meeren

$N = \text{geometr. Nordpol: } \underline{e}^{(3)}$

(ii) $\underline{D} \neq \underline{0}$

• Bewegung im IS? $\left(\frac{d\underline{L}}{dt}\right)_{IS} \stackrel{\underline{D}=0}{=} \underline{0} \rightarrow \underline{L} = L \underline{e}_{I3} = \text{konst.}!$

$\omega_2 = \omega_0, \omega_{1/2}(t)$ in (10.8) \rightarrow Eulerscher Winkel: (10.52)

o.B.: $\phi = \frac{a_0 t}{\sin \Theta_0} + \phi_0, \psi = \Omega t + \psi_0, \Theta = \Theta_0$ mit $\tan \Theta_0 = \frac{a_0}{\omega} \frac{\Theta_1}{\Theta_3}$

Orb. von $\underline{e}^{(3)}$ um \underline{e}_{I3}

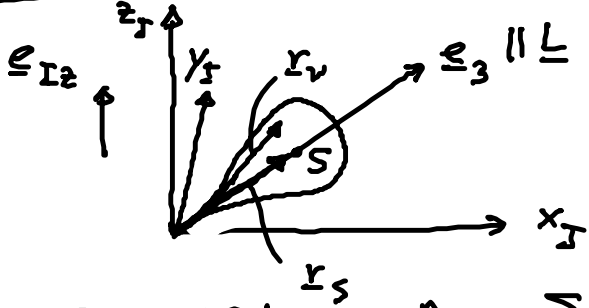
Orb. des starren Körpers um $\underline{e}^{(3)}$

\neq (Figurenachse $\underline{e}^{(3)}$) \underline{e}_{I3}

(10.6): $\underline{\omega} = \dot{\phi} \underline{e}_{I3} + \dot{\psi} \underline{e}_3 \dots$ liegt in Ebene von $\underline{e}_{I3}, \underline{e}^{(3)}$

- \Rightarrow
- 1. $\underline{\omega}$ rotiert auf Sparkegel um \underline{e}_{I3}
 - 2. Polkegel rollt auf Sparkegel ab
- } reguläre Präzession

e) Schwerer, symmetr. Kreisel: $D_i \neq 0$



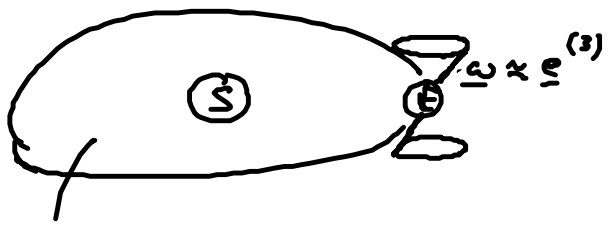
• homog. Grav. feld: $\underline{D} = - \sum_v \underline{r}_v \times m_v g \underline{e}_{Iz}$

$(\underline{r}_S = \frac{\sum m_v \underline{r}_v}{M}) \Rightarrow \underline{D} = - \underline{r}_S \times M g \underline{e}_{Iz} = \frac{d\underline{L}}{dt} \perp \underline{e}^{(3)} (\parallel \underline{r}_S)$

• sei $\underline{L} \parallel \underline{e}^{(3)}$ $\frac{d\underline{L}}{dt} \perp \underline{L} \rightarrow \underline{L} \parallel \underline{e}^{(3)}$ präzediert um z_I -Achse!

• o.B. allg. Bewegung: Präzession & Nutation \hookrightarrow „Torhelm“ des Kreisels

• Erde: $\underline{D}^{\text{Sonne}} \neq 0, \underline{D}^{\text{Mond}} \neq 0 \rightarrow$ astronomische Präzession der Erdoberfläche um Normale der Ekliptik, Periode von 26000 Jahre



Eklipik

f) Eingespannter Kreisel: