11. Harmonisch gekoppelte Massepunkte

11.3 Eigenfrequenzen, Eigenschwingungen, Normal-koord.

$$\boxed{\ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{y} = 0} \qquad (11.10)$$

$\underline{y} \in \mathbb{R}^{3N}$

$\underline{\underline{\Omega}}$ ... $3N\times 3N$ Matrix, symmetr., pos. def.

- Lsg: Ansatz: $\underline{y} = \underline{e}\, e^{i\omega t}$ in (11.10)

$$\rightarrow \quad \boxed{\left[-\omega^2 \mathbb{1} + \underline{\underline{\Omega}}\right]\underline{e} = \underline{0}} \qquad (11.11)$$

EW-Problem für $\underline{\underline{\Omega}}$

→ Eigenfrequenzen: $\pm\omega^{(k)}$

EV: $\underline{e}^{(k)}$ mit $\underline{e}^{(k)}\cdot\underline{e}^{(l)} = \delta_{kl}$

→ reelle Lsg:

$$\boxed{\underline{y}^{(k)}(t) = a^{(k)}\,\underline{e}^{(k)} \cos\left(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)}\right)} \qquad (11.15)$$

... Eigen-/Normalschwingung/Eigenmode

Amplitude — charakt. kollekt. Schwingung — Phase

- allg. Lsg. von (11.10): Superpositionsprinzip:

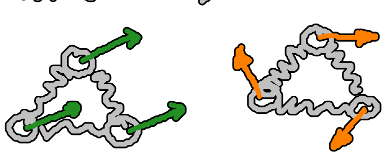
$$\boxed{\underline{y} = \sum_{k=1}^{f=3N} \underline{y}^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{f} a^{(k)}\,\underline{e}^{(k)} \cos\left(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)}\right)} \qquad (11.16)$$

- Bemerkungen

(1) in (11.10) enthalten: 3 Translationen : $\underline{r}_\nu(t) = \underline{v}\,t + \underline{r}_{\nu 0}$

Gesamtkraft = Null

3 Rotationen



$$\boxed{\omega^{(k)} = 0 \qquad k = 1,\dots,6} \qquad (11.17)$$

(2) Entartung:

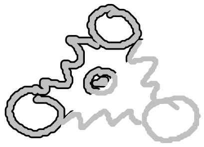
$$\boxed{\omega^{(k)} = \omega^{(l)}, \quad k \neq l} \qquad (11.18)$$

Bsp: 2fache Entartung → Lsgraum:

Superposition aus: $\left[a_\pm^{(k)}\,\underline{e}^{(k)} + a_\pm^{(l)}\,\underline{e}^{(l)}\right] \begin{matrix}\cos\omega^{(k)}t\\ \sin\omega^{(k)}t\end{matrix}$

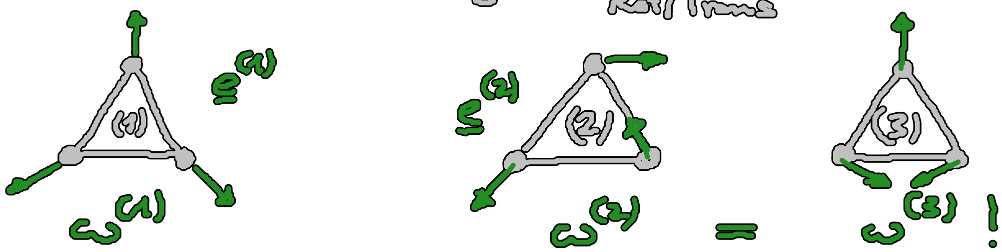
(i) zufällige Entartung

(ii) aufgrund von Symmetrien

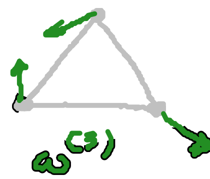
(3) Bsp:  3-zählige Symmetrie um ⊙

[Drehung um 120°: Molekül geht in sich über]

Gruppentheorie $\longrightarrow$ $3 = \underbrace{9}_{3\times 3} - \underbrace{6}_{\text{Rot/Trans}}$ Eigenschwingungen: [o.B.]



keine Schwerpkts. bewegung

Komb. ergibt z.B.: 

$\hat{=}$ (3) um 120° gedreht

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Symmetrien \& Gruppentheorie} \\ \longrightarrow \text{Eigenmoden}\end{array}}$$

• Normalkoordinaten

$\{\underline{e}^{(1)} \dots \underline{e}^{(3N)}\}$ ... vollständige ONB im $\mathbb{R}^{3N}$

allg. Lsg:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{y}(t) = \sum_{k=1}^{3N} q^{(k)}(t)\, \underline{e}^{(k)} \\ \text{mit } q^{(k)}(t) = \underline{y} \cdot \underline{e}^{(k)} \end{array}} \quad (11.19)$$

• Dgl. für $q^{(k)}(t)$?

$$\underline{e}^{(k)} \cdot \Big| \; \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\Omega}}\, \underline{y} = 0 \quad (11.10)$$

mit (11.19) $$\ddot{q}^{(k)} + \underline{e}^{(k)} \cdot \sum_l \underbrace{\underline{\underline{\Omega}}\, \underline{e}^{(l)}}_{[\omega^{(l)}]^2 \underline{e}^{(l)}} q^{(l)}(t) = 0$$

$$\xrightarrow{\underline{e}^{(k)} \cdot \underline{e}^{(l)} = \delta_{kl}} \quad \boxed{\ddot{q}^{(k)} + [\omega^{(k)}]^2 q^{(k)} = 0} \quad (11.20)$$

also: Eigenschwingungen

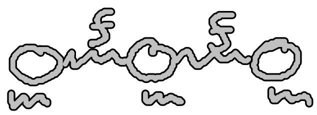
$\hat{=}\ f = 3N$ entkoppelte harm. Oszillatoren

der Frequenzen $\omega^{(k)}$

Lsg: $$\boxed{q^{(k)}(t) = a^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)})} \quad (11.21)$$

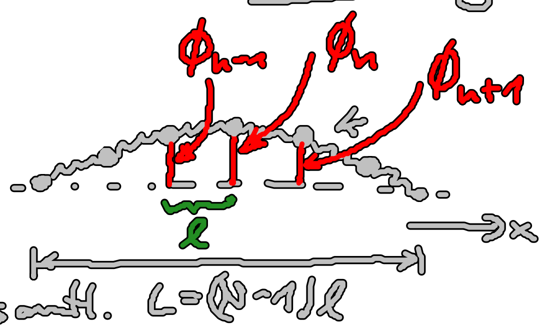
[vgl. (11.15)]

- Bsp: [Übungen]



11.4. Schwingende Saite: Wellengleichung

- Modell:



N ... Massepkte gekoppelt mit nächsten Nachbarn

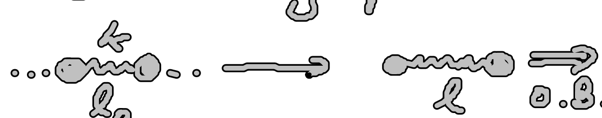
ϕ_n ... transv. Auslenkung des n-ten Massenpktes

- Newton für den n.ten Massenpkt:

$$m\ddot{\phi}_n = -f(\phi_n - \phi_{n-1}) - f(\phi_n - \phi_{n+1}) \quad (11.22)$$

harm. Näherung

f? Saite vorgespannt (11.23)



$$f \approx k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$$

- Kontinuumsübergang zur massebelegten Saite:

$$l = \Delta x \to 0, \quad N \to \infty$$

$$\phi_n(t) \to \phi(x,t) \quad \text{... Feldvariable}$$

diskr. Index (n), kont. Ortsvariable (x)

also: $$\phi_{n\pm1} - \phi_n \to \phi(x \pm \Delta x) - \phi(x) \overset{\text{Taylor}}{=} \pm \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta x^2 + \dots$$

$\to$ r.S. von (11.22): $$f\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta x^2 \quad (1)$$

l.S. " " : $m \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ (2)

sammle Koeff.: $\underbrace{\frac{\Delta x}{m}}_{\frac{1}{\rho}} \quad \underbrace{f \Delta x}_{(11.23),\ \Delta x = \ell}$ $k(\Delta x - \Delta x_0)$ $= \sigma$ $\xrightarrow{\Delta x \to 0}$ $\boxed{c^2 = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\text{Zugkraft}}{\text{Linien-Massendichte}}}$ (11.23b)

c ... Wellengeschw.

$$\xrightarrow[(11.23b)]{(1)=(2)} \boxed{\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\phi(x,t) = 0} \quad (11.24)$$

... Wellengl. für Feldamplitude ϕ

[N Dgl. (11.22) $\longrightarrow$ part. Dgl.]

• allg. Lsg. der Wellengl.

neue Variablen: $x - ct = \xi$, $x + ct = \eta$ $\longrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial ct} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$ (11.25)

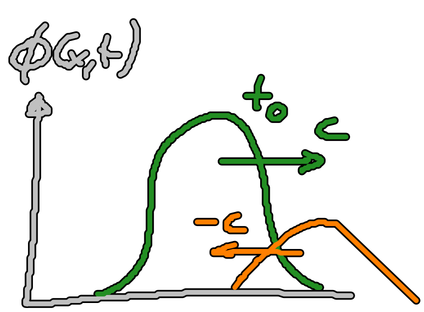
berechne: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}$ (11.26)

... „Wellenoperator" aus (11.24)

$$(11.24) \xrightarrow[\text{Variable}]{\text{neue}} \boxed{\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\phi(\xi,\eta) = 0} \quad (11.27)$$

allg. Lsg: $\phi(\xi,\eta) = \underbrace{f(\xi) + g(\eta)}_{\text{beliebige Fkt.}} = \underbrace{f(x-ct) + g(x+ct)}_{\text{laufen „forminvariant" nach rechts / links mit Geschw. c}}$

$\hat{=}$ keine Dispersion



• Normalschwingungen

Ansatz: ebene Welle $\phi(x,t) = a\, e^{i(kx-\omega t)}$ $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = 0$$

ω ... Kreisfrequenz
k ... Wellenzahl (11.28)

in (11.24): $\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)\phi = 0 \longrightarrow \boxed{\omega = \pm ck}$ (11.29)

... Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$ (11.30)

Normalschw. $\longrightarrow$ $\phi_k(x,t) \sim$ $e^{ik(x-ct)}$ ... nach rechts
$e^{ik(x+ct)}$ ... nach links laufende Welle

, Wellenzahl k ersetzt diskreten Index $k = 1 \dots 3N$ von Kap. 11.3

• allg. Lsg. der Wellengl.

Superpositionsprinzip: (11.31)

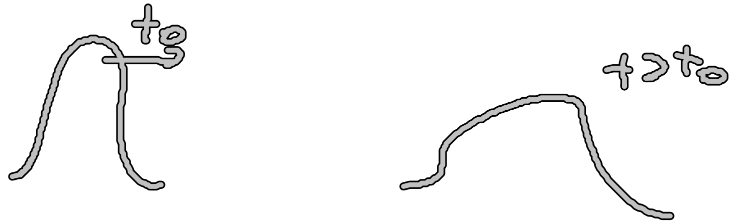
$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, a(k)\, e^{ik(x-ct)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, b(k)\, e^{ik(x+ct)}$$

Fourier-Integral-Darstellung eines nach rechts / links laufenden Wellenpakets $f(x-ct)$ / $g(x+ct)$

$\phi(x,t)$ reell $\longrightarrow$ $a(-k) = a^*(k)$, $b(-k) = b^*(k)$ (11.32)

• Wellen mit Dispersion: $\boxed{c = c(k)}$ $c = \frac{\omega(k)}{k}$ ... Phasengeschw. einer Welle (11.33)

Annahme: $c = c(k)$ in Wellenpaket (11.31)
$\longrightarrow$ Paket zerfließt



Bsp: a) EM-Wellen im Medium; Glasfaser!

b) QM: Wellen eines freien Teilchens

o.B.: $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \longrightarrow c = \frac{\hbar k}{2m}$

- eingespannte Saite: s. Übungen