III Analytische Mechanik

12. Lagrangesche Gleichungen

12.1. Zwangsbedingungen & generalisierte Koord.

12.2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit

- hier: Statik, auch für Dynamik gültig
- Unterscheide:

$d\underline{r}_i$ ... reale infinitesimale Verrückung, $dt \neq 0$

$\delta\underline{r}_i$ ... virtuelle " " , $\delta t = 0$
verträglich mit den Zwangsbed.

wichtig für $\dfrac{\partial \phi^{(\nu)}(\ldots)}{\partial t} \neq 0$ (12.9)

- System im GG:

(12.1) $\longrightarrow$ $\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(+)} + \underline{F}_i^{(z)} = 0$, $i = 1, \ldots N$

$\longrightarrow$ virtuelle Arbeit durch $\delta\underline{r}_i$:

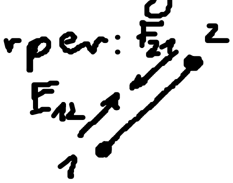
$$\delta A = \sum_i \underline{F}_i \cdot \delta\underline{r}_i = \sum_i \underline{F}_i^{(+)} \cdot \delta\underline{r}_i + \sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta\underline{r}_i = 0 \quad (12.10)$$

- Sommerfeld:

Postulat: „Bei jedem glatt geführten mechan. System ist die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich Null."
$$\sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta\underline{r}_i = 0 \quad (12.11)$$

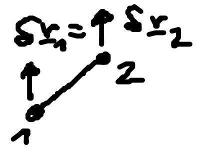
Goldstein: Beschränkung auf Systeme mit (12.11)

- Bsp: (i) starren Körper:



$\underline{F}_1^{(z)} = \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = -\underline{F}_2^{(z)}$ (actio = reactio)

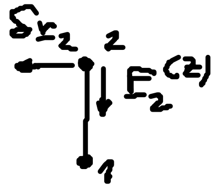
(1) Translation



$(12.11) \longrightarrow \underline{F}_1^{(z)}\cdot\delta\underline{r}_1 + \underline{F}_2^{(z)}\cdot\delta\underline{r}_2$

$= \underbrace{(\underline{F}_1^{(z)} + \underline{F}_2^{(z)})}_{=0}\cdot\delta\underline{r}_1 = 0$

(2) Rotation:



$\underline{F}_2^{(z)}\cdot\delta\underline{r}_2 = 0, \quad \underline{F}_2^{(z)}\perp\delta\underline{r}_2$

(ii) Achterbahn: $\underline{F}^{(z)}\perp\delta\underline{r}$

- also: Prinzip der virtuellen Arbeit

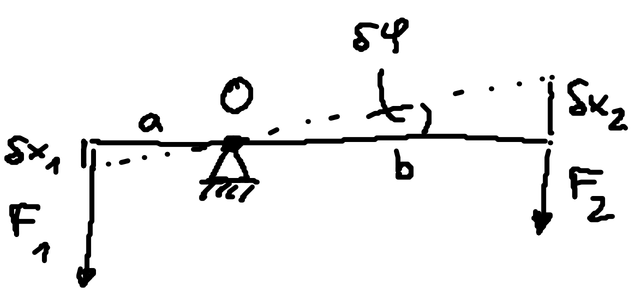
(12.10) mit (12.11) $\longrightarrow$ $\boxed{\sum_i \underline{F}_i^{(t)}\cdot\delta\underline{r}_i = 0}$ (12.12)

... virtuelle Arbeit der „treibenden Kräfte" verschwindet

- Bemerkungen:
  - (i) (12.12) bestimmt gesamte Statik!
  - (ii) Haftreibungskräfte $= \underline{F}^{(z)}$

    Gleit " " $= \underline{F}^{(t)}$

- **Bsp**: Hebel



GG? (12.12)

$F_1\,\delta x_1 + F_2\,\delta x_2 = 0$

$a\,\delta\varphi \qquad -b\,\delta\varphi$

$\rightarrow (F_1 a - F_2 b)\,\delta\varphi = 0$

$F_1 a = F_2 b$ (12.13)

= GG der Drehmomente um O ✓

12.3. Das d'Alembertsche Prinzip

• Ziel: erweitere (12.12) auf die Dynamik

• „Kunstgriff"

Newton: $\underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)} = \boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i =: -\underline{F}^*}$

... d'Alembertsche Trägheitskraft/-widerstand

(i) fiktive Kraft!

(ii) Scheinkräfte [vgl (7.3)]

$\longrightarrow$ Zentrifugalkräfte (Achterbahn!)

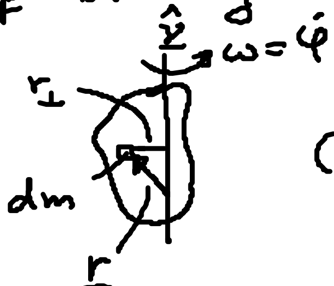
• virtuelle Arbeit:

$$\sum_i (\underbrace{\underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{0}) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad \& \quad \sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

$$\xrightarrow[\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}^{(z)}]{} \quad \boxed{\sum_i (\underline{F}_i^{(t)} - m_i \ddot{\underline{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0} \quad (12.15)$$

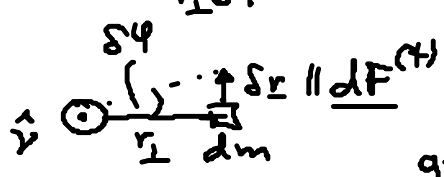
... d'Alembertsches Prinzip (Differentialprinzip)

• Bsp: Drehung eines starren Körpers um feste Achse:



i.f. $\sum_i \to \int dm$

(1) $\int \underbrace{d\underline{F}^{(t)} \cdot \delta \underline{r}}_{\substack{d\underline{F}^{(t)} \parallel \delta \underline{r} \\ \text{Rest } d\underline{F}^{(z)}}} = \int dF^{(t)} \underbrace{\delta r}_{r_\perp \delta\varphi} = D^{(t)} \delta\varphi$



ges. treibendes Drehmoment

(2) $\int dm\, \ddot{\underline{r}} \cdot \delta \underline{r} = \int dm\, \dot{v}\, \underbrace{\delta r}_{r_\perp \delta\varphi} = \delta\varphi\, \dot{\omega}\, \Theta$

Zentrifugalkraft $\perp \delta \underline{r}$, fällt weg

$\dot{v} = r_\perp \dot{\omega}$

mit $\boxed{\Theta = \int dm\, r_\perp^2 \overset{(10.26)}{=} \hat{\underline{\nu}} \cdot \underline{\underline{\Theta}}\, \hat{\underline{\nu}}}$

... Trägheitsmoment um Achse $\hat{\underline{\nu}}$ (12.16)

$$(12.15) \longrightarrow (1) - (2) = 0$$

$$\longrightarrow \left(D^{(t)} - \Theta\dot{\omega}\right)\delta\varphi = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{D^{(t)}}_{\underline{D}\cdot\hat{\underline{\nu}}} = \underbrace{\Theta\dot{\omega}}_{\dot{\underline{L}}\cdot\hat{\underline{\nu}}}} \quad (12.17) \qquad \underline{L} = \underline{\Theta}\,\underline{\omega}$$

also: Zwangsdrehmomente $\underline{D}^{(z)} \perp \hat{\underline{\nu}}$ wegen $\underline{L} \parallel \hat{\underline{\nu}}$ tauchen hier nicht auf.

[vgl. Kap. 10.3 f): $\underline{D}^{(z)}$ ... durch Lagerkräfte]

12.4. Lagrangesche Gln. 1. Art

- d'Alembert $\longrightarrow$ DGln. für $\underline{r}_k$ & Zugang zu Zwangskräfte
- Es galt: (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\underline{F}_k^{(t)} - m\ddot{\underline{r}}_k\right)\cdot\delta\underline{r}_k = 0$ (12.15)

  (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)}\cdot\delta\underline{r}_k = 0$, $\nu = 1, 2, \dots Z$ (12.5)

  $\delta\underline{r}_k$ mit Komp. $\delta x_{k\alpha}$, $\alpha = 1,2,3$

  also: von $3N$ Verrückungen $\delta x_{k\alpha}$ sind nur $f = 3N - Z$ unabhängig

- Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren λ_ν:

$$(1) + \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu \, (2) = 0$$

beliebiger Faktor $\lambda_\nu(t)$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left(\underline{F}_k^{(t)} - m\ddot{\underline{r}}_k + \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)}\right)}_{\underline{V}_k \text{ mit Komp. } V_{k\alpha}\,,\ \alpha = 1,2,3} \cdot\delta\underline{r}_k = 0 \quad (12.18)$$

(i) Wähle für Z Verrückungen $\delta x_{k\alpha}$ die $\lambda_\nu(t)$ so, daß

$V_{k\alpha} = 0$

(ii) die restlichen $3N - Z \overset{\text{f}}{=}$ Verrückungen $\delta x_{\ell\beta}$ sind frei wählbar: (12.18) $\longrightarrow$ $V_{\ell\beta} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{m\ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \qquad k = 1, .., N} \qquad (12.19)$$

... Lagrangesche Gln. 1. Art

$$\& \quad \boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \cdot \dot{\underline{r}}_k = 0 \quad , \quad \nu = 1, \dots Z} \qquad (12.20)$$

... Bindungsgln. [$\hat{=}$ (12.6) mit $\delta \underline{r}_k \to \dot{\underline{r}}_k$]

also: $3N + Z$ DGln für $3N + Z$ Variable $\underline{r}_k, \lambda_\nu$

- Lösungsweg:
  (1) Bestimme Z Multiplikatoren λ_ν aus Z Gln. von (12.19)
  (2) Einsetzen der λ_ν in restl. $3N - Z$ Gln.
  & Z Gln. von (12.20)

  $\longrightarrow$ $3N$ DGln. für $\underline{r}_k$

- Zwangskräfte: vgl. (12.19) mit $m\ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \underline{F}_k^{(z)}$ (12.1)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{F}_k^{(z)} = \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \quad , k = 1, .., N} \qquad (12.21)$$

also: $\lambda_\nu(t) \longrightarrow \underline{F}_k^{(z)}$!