# 12.5. Lagrangesche Gln. 2. Art

- generalisierte Kräfte:

$$\boxed{Q_j = \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}} \quad (12.25)$$

$$\longrightarrow \quad \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_j Q_j \, \delta q_j$$

- Lagrangesche Gln. 2. Art (im allgemeinen)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \quad (12.26)$$

$T$ ... kinetische Energie

a) konservative Systeme: $\underline{F}_i^{(t)} = -\underline{\nabla}_i U \longrightarrow \boxed{Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}}$ (12.28)

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \\ L = T - U \text{ ... Lagrange-Fkt.} \end{array}}$$

(12.29) .... Lagrangesche Gln.

(12.30)

b) generalisiertes/geschwindigkeitsabh. Potential $W$:

- Annahme: $W = W(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ existiert

mit $Q_j = -\frac{\partial W}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}$ (12.31)

$$(12.26) \longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \\ L = T - W \end{array}} \quad (12.32)$$

- **Bsp:** geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld
  - Lorentzkraft:

$$\underline{F} = \underset{\text{Ladung}}{q}\left(\underset{\substack{\text{elektr.}\\ \text{Feld}}}{\underline{E}} + \underset{\substack{\text{Geschw.}\\ \dot{\underline{r}}}}{\underline{v}} \times \underset{\text{Magnetfeld}}{\underline{B}}\right) \qquad (12.33)$$

  - o.B.

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \\ \underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \\ \varphi(\underline{r},t) \ \dots \ \text{skalares Potential} \\ \underline{A}(\underline{r},t) \ \dots \ \text{Vektorpotential} \end{array}} \qquad (12.34)$$

$$\xrightarrow[\text{in (12.33)}]{(12.34)} \quad \underline{F} = q\left[-\underline{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} + \underline{v} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A})\right] \qquad \underline{v} = \underline{v}(t) \rightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{(i)} \quad \underline{v} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{v} \cdot \underline{A}) - \underline{(\underline{v} \cdot \underline{\nabla})\underline{A}}$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

$$\text{(ii)} \quad \underline{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} + \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{\nabla})}_{\substack{\text{konvektive}\\ \text{Ableitung}}}\underline{A}} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} + \left(\dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\underline{A}$$

$$= \frac{d}{dt}\underline{A}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{F} = q\left[-\underline{\nabla}\varphi - \frac{d}{dt}\underline{A} + \underline{\nabla}(\underline{v} \cdot \underline{A})\right] \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v_i} = 0!$$

$$\longrightarrow \quad F_i = q\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi - \underline{v} \cdot \underline{A}) - \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial}{\partial v_i}(\underbrace{\underline{A} \cdot \underline{v}}_{A_j v_j} - \varphi)}_{A_i}\right]$$

$$\xrightarrow{v_i = \dot{x}_i} \quad \boxed{\begin{array}{l} F_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} \\ \text{mit } W = q(\varphi - \underline{A} \cdot \dot{\underline{r}}) \end{array}} \qquad (12.35)$$

also: $\boxed{L = T - q\varphi + q\,\underline{A} \cdot \dot{\underline{r}}}$ (12.36)

## c) Reibungskräfte

- Aufteilung der Kräfte: $\underline{F}_i^{(t)} =$ kons. Kraft + Rest

  $\hookrightarrow L = T - U$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j} \quad (12.37)$$

- Reibungskraft:

  linearer Ansatz: $F_{i\alpha}^{(R)} = -\overset{\text{Reibungstensor}}{\gamma_{\alpha\beta}^{(i)}}\, \dot x_{i\beta}$ (12.38) $\quad \alpha,\beta = 1,2,3$

  $[\underline{F}_i^{(R)} = -\underline{\underline{\gamma}}^{(i)}\, \underline{\dot x}_i]$

  Bsp: Stokesche Reibung einer Kugel: $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma\, \delta_{\alpha\beta}$

  $\longrightarrow F_{i\alpha}^{(R)} = -\gamma\, \dot x_{i\alpha}$

  $\underline{F}_i^{(R)} \parallel \underline{\dot r}_i$

- Rayleighsche Dissipationsfkt:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i \gamma_{\alpha\beta}^{(i)}\, \dot x_{i\alpha}\, \dot x_{i\beta} \quad , \quad \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma_{\beta\alpha}^{(i)}} \quad (12.39)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{F_{i\alpha}^{(R)} = -\frac{\partial W}{\partial \dot x_{i\alpha}} = -\gamma_{\alpha\beta}^{(i)}\, \dot x_{i\beta}} \quad (12.40)$$

Bsp: $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma\, \delta_{\alpha\beta} \qquad W = \frac{1}{2}\sum_i \gamma\, \dot x_{i\alpha}^2 \qquad F_{i\alpha}^{(R)} = -\frac{\partial W}{\partial \dot x_{i\alpha}} = -\gamma \dot x_{i\alpha}$ ✓

- physikal. Interpretation:

$$-\sum_i \underline{F}_i^{(R)} \cdot \underline{\dot r}_i \overset{(12.40)}{=} \sum_i \dot x_{i\alpha}\, \gamma_{\alpha\beta}^{(i)}\, \dot x_{i\beta} \overset{(12.39)}{=} 2W$$

$\boxed{\text{2W ... die von den Reibungskräften dissipierte Leistung}}$

- generalisierte Kräfte:

$$Q_j \overset{(12.25)}{=} \sum_i \underline{F}_i^{(R)} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \overset{(12.40)}{=} -\sum_i \frac{\partial W}{\partial \dot x_{i\alpha}}\, \frac{\partial x_{i\alpha}}{\partial q_j}$$

Einsteinsche Summenkonv. für $\alpha,\beta$

$$\dot x_{i\alpha} = \sum_j \frac{\partial x_{i\alpha}}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial}{\partial t}x_{i\alpha}$$

$$= \frac{\partial \dot x_{i\alpha}}{\partial \dot q_j} \quad [\text{vgl. } (12.22)]$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{Q_j = -\frac{\partial W}{\partial \dot q_j}} \quad (12.42)$$

$\dot q_j$ — generalisierte Geschw.

- Lagrangeschen Gln:

$$(12.37) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}}_{\text{„Reibung"}} = 0} \quad (12.43)$$

## 13. Hamiltonsche Prinzip

- bisher: d'Alembertsches Prinzip: $\sum_i (\underline{F}_i^{(t)} - m_i \ddot{\underline{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0$

  $\longrightarrow$ Differentialprinzip: $\delta \underline{r}_i$ zur Zeit $t$

- jetzt: Integralprinzip: virtuelle Verrückung der gesamten Bahn
  & Extremal „

  $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$
  Mechanik, Elektromagnetismus, komplexe Materialien, Rel. Theorie, fundamentale Ww der Natur

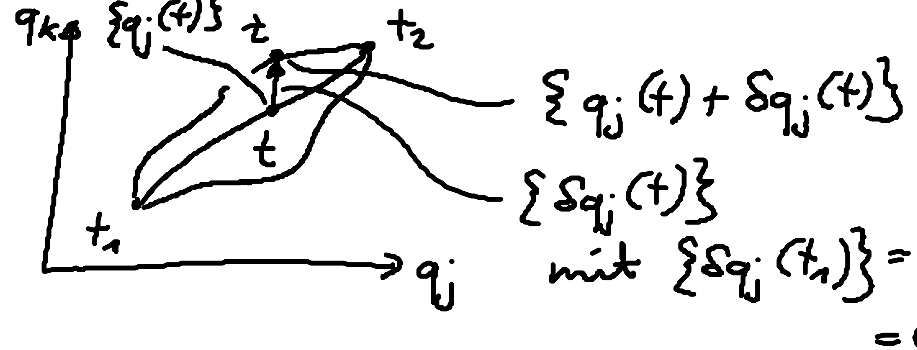
### 13.1. Hamiltonsches Prinzip („der kleinsten Wirkung") [historisch]

- mechan. System: $f$ generalisierte, voneinander unabh. Koord.

  $q_1(t) \ldots q_f(t) = \{q_j(t)\}$ (13.1)

- physikal / virtuelle Bahnen:

2D-Schnitt des Konf. raumes



mit $\{\delta q_j(t_1)\} = \{\delta q_j(t_2)\}$
$= 0$

- **Hamiltonsches Prinzip:**

Die physikal. Bahn eines Systems zwischen $\{q_j(t_1)\}$ und $\{q_j(t_2)\}$ im Konfigurationsraum ist durch ein Extremum der Wirkung $S=\int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j\},\{\dot{q}_j\},t)\,dt$ ausgezeichnet:

$$\underbrace{\delta S}_{\text{„Variation von S"}} = 0 \qquad (13.2)$$

L heißt Lagrange-Fktn.

Bem: (i) $\delta S$ = Änderung von S bei $\{q_j(t)\} \longrightarrow \{q_j(t)+\delta q_j(t)\}$

(ii) Extremum: $\delta S = 0$
Minimum oder Maximum!

(iii) Einheit von S: Energie × Zeit

- konservative Kräfte/generalisiertes Potential U:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \qquad (12.31)$$

Beh:

$$\boxed{\begin{array}{l} L = T - U \\ \delta S = 0 \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \end{array}} \qquad (13.3)$$

… Lagrangesche Gln. (2. Art)

Beweis: Kap 13.3

- fundamentale Ww in der Natur

1. Gravitation
2. EM Ww
3. schwache Ww („Neutrinos")
4. Starke Ww (Kernkräfte)

} herleitbar über Hamiltonsches Prinzip & L