

13.2 Eulersche Variationsrechnung

$$\text{Funktional } F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y, \underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}}, x\right) dx$$

$$\delta F = 0 \iff \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (13.14)$$

... Euler-Lagrange-Differentialgl.

13.3.

Lagrangesche Gln 2. Art

• Herleitung aus Hamiltonschen Prinzip

a) Kons. Kräfte / generalisiertes Potential:

• Lagrangesche Fkt: $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = T - U$

• Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dots) dt$

• Variation: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt = 0$

wie in Kap. 13.2 für jedes $y(x) \rightarrow q_j(t)$

$$(13.12) \rightarrow \delta S = \int \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j(t) dt = 0$$

δq_j unabhängig
voneinander
variierbar

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (13.3)$$

qed

b) nicht konservative Kräfte / allgemeine Fall:

• L existiert nicht, stattdessen:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = 0$$

(13.17)

mit $\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i^{(t)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j$ [vgl. (12.24)]

... virtuelle
Arbeit

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^{(t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

• Ausführung der Variation:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \underbrace{\left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right]}_{=0} \delta q_j dt$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, f \quad (12.25)!$$

• Vorsicht: Goldstein / Nolting

~~$$L = T - W \quad \text{mit} \quad W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$$~~

„Arbeit ist keine Zustandsgröße, hängt vom Weg ab“
(s. Sommerfeld)

c) Potentialkräfte mit anholonomem Zwangsbed:

• also: $L = T - U$ mit $\sum_j \phi_j^{(r)} \delta q_j = 0$ (13.20)
 $r = 1, \dots, z$

Variation:

$$\delta S = \int \sum_j \underbrace{\frac{\delta S}{\delta q_j}}_{\text{wie in a)}} \underbrace{\delta q_j}_{\text{nicht unabh.}} dt = 0 + \sum_{\nu=1}^z \lambda_{\nu} \sum_j \phi_j^{(\nu)} \delta q_j$$

$$= \int \sum_j \left(\frac{\delta S}{\delta q_j} + \sum_{\nu=1}^z \lambda_{\nu} \phi_j^{(\nu)} \right) \delta q_j dt = 0$$

Argumentation wie in Kap. 12.4

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}}_{-\frac{\delta S}{\delta q_j}} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^z \lambda_{\nu} \phi_j^{(\nu)}}_{\text{Zwangskräfte [vgl. (12.21)]}}, \quad j = 1, 2, \dots, f \quad (13.21)$$

... Lagrangesche Gln. gemischter Art

$$\sum_{j=1}^f \phi_j^{(\nu)} \dot{q}_j = 0, \quad \nu = 1, \dots, z \quad (13.22)$$

also: $f+z$ Dgl. für $f+z$ Variable q_j, λ_{ν}

13.4. generalisierte Impulse

Def:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (13.23)$$

... generalisierter
kanonischer
zu q_j konjugierter } Impuls

Bsp: (i) Teilchen im 3D Potential: $q_j = x_j$, $j=1,2,3 \dots$ kart. Koord.

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \sum_j \dot{x}_j^2 \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} L = T - U \rightarrow \boxed{p_j = m \dot{x}_j} \quad (13.24)$$

(ii) Teilchen im em-Feld: $L = T - W = T - q\varphi + q \sum_i A_i \dot{x}_i$ (12.36)

\swarrow Ladung \nearrow skalares \nwarrow Vektorpotential
 Feld

(13.23) \rightarrow $\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + q A_i}$ (13.25)

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 mechan. Impuls des
 Impuls mitgeführten em Feldes

NB: viele Teilchen mit holonomem Zwangsbed.:

$$x_i = x_i(q_1 \dots q_s, t)$$

\uparrow	$1 \dots 3N$	x_1, x_2, x_3	A_1, A_2, A_3	1. Teilchen
		x_4, x_5, x_6	A_4, A_5, A_6	2. Teilchen
			\vdots	

mit $\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$

in (12.36) \rightarrow $\boxed{W = q\varphi - q \sum_j a_j \dot{q}_j + q \sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial t}}$ (13.25)

mit $a_j(\{q_i\}, t) = \sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$

... generalisiertes
Vektorpotential

= 0 für
skleronome
Zwangsbed

(iii) ebene Bewegung: $x, y \rightarrow \rho, \varphi$
im Potential

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \stackrel{\substack{x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi}}{=} \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$\text{radialer Impuls: } p_{\rho} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho}$$

$$\text{Drehimpuls: } p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} = m \rho v_{\varphi}$$

(13.27)

13.5 Symmetrien & Erhaltungssätze

• Lagrange-Gln: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, $j = 1, \dots, f$

mit $L = T - U \dots$ kons. System

$\hat{=}$ f Dgln 2. Ordnung in t

\rightarrow Lsg. mit $2f$ Integ. konst.

nicht immer explizit angebar!

(" " integrierbar)

• trotzdem: hilfreiche Aussagen über System möglich

\rightarrow Noether Theorem:

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikal. Systems gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt.

kont. Symmetrie = kont. Transformation, die Verhalten des physikal. Systems nicht verändert.

Erhaltungsgröße = 1. Integral der Bewegung:
Konstante " " "

$$E = E(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \text{konst. } \forall t$$

• Untersuche anhand von $L = T - U$:

a) Impulserhaltung

- Def: zyklische Koord:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \quad (13.28)$$

... Symmetrie von L bzgl. Verschiebung q_j

(13.28) in (13.3) $\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{(13.23)}{=} \frac{d}{dt} p_j = 0!$
 Lagrange.
 Gln.

$$\rightarrow \boxed{p_j = \text{konst}}$$

... Impulserhaltung $\hat{=}$ Konstanz der Bewegung

• Bsp (i) freies Teilchen: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{konst.}!$

Impulserhaltung \leftrightarrow Translationsinvarianz des Raumes
 Homogenität

(ii) Teilchen im Zentralpotential: $U = U(r)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst.}! \quad (\text{vgl. (13.27)})$$

Orbitimpulserhaltung \leftrightarrow Drehinvarianz des Raumes
 Isotropie