13.5. Symmetrien & Erhaltungssätze

· Noether-Theorem

a) Impulserhaltung:

- generalisierter Impuls: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ (13.23)
- zyklische Koord. : $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (13.28)

$\rightarrow \frac{d}{dt} p_j = 0$

$\rightarrow p_j = \text{konst.}$

(i) Impulserhaltung für freies Teilchen

(ii) Drehimpulserhaltung im Zentralpotential

(iii) Vielteilchensysteme

– Schwerpkts. Koord. $R_j = q_j$ $\hat{=}$ Verschiebung des ges. Systems

falls $\frac{\partial L}{\partial R_j} = 0 \longrightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_j} = \text{konst.}$

... Erhaltung des Gesamtimpulses [Bew.: Goldstein/Nolting]

:

– Drehung des Gesamtsystems um $\varphi = q_j$ um Achse $\hat{\underline{\nu}}$:

falls $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst}$

... Erhaltung des Gesamtdrehimpulses [Bew. Goldstein]

b) $\boxed{\underline{\text{Energieerhaltung}}: \longleftrightarrow \text{„Invarianz unter Zeittranslation"}}$

- also: $\boxed{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial t} = 0}_{\text{Invarianz}}} \longrightarrow \frac{d}{dt}L = \sum_j \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\underset{(13.3)}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}} \dot q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} \ddot q_j \Big)$

$$0 = \frac{d}{dt}\Big[L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} \dot q_j \Big]$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{H = \sum_j p_j \dot q_j - L = \text{konst.}} \quad (13.30)$$

... Hamiltonfkt.!

- Bedeutung von H:

mit $L = T - U \xrightarrow[p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}]{(13.30)} \quad H = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} \dot q_j - T + U \quad (13.31)$

– kinet. Energie: $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i^2$ mit $\dot{\underline{r}}_i \underset{\underline{r}_i = \underline{r}_i(\{q_j\}, t)}{=} \sum_j \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot q_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{f} a_{jk} \dot q_j \dot q_k + \sum_{j=1}^{f} b_j \dot q_j + c \\ \text{mit} \quad a_{jk} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \overset{!}{=} a_{kj} \\ b_j &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \\ c &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \Big(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\Big)^2 \end{aligned}} \quad (13.32)$$

- skleronome Zwangsbed.:

$$\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0\,! \xrightarrow[c = 0 = b_j]{} \boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk} \dot q_j \dot q_k} \quad (13.33)$$

... homogene Fkt. 2. Ordnung in $\dot q_j$

$$\xrightarrow{\text{in } (13.31)} \boxed{\underbrace{\sum_j}\ \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}}\ \dot q_j \ \underline{\ = 2T\ }} \quad (13.34)$$

$(a_{jk}=a_{kj}) = \sum_k a_{jk}\dot{q}_k$!

mit (13.34) in (13.31): $H = 2T - T + U$

$$\longrightarrow \boxed{H = T + U} \quad (13.35)$$

... Gesamtenergie

- Bem: (i) gilt für kons. Systeme mit skleronomen, holonomen Zwangsbed.

  (ii) o.B.: gilt auch für generalisierte Potentiale

  $$\omega = q\varphi - q\sum_i A_i \dot{x}_i \quad (12.36)$$

  aber: $H = T + q\varphi$

c) Eichinvarianz von L:

Invarianz von $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (*)

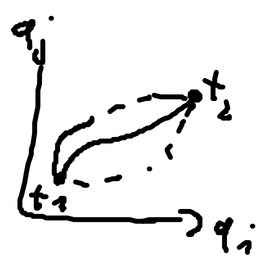
unter Eichtransformation: $L \longrightarrow L + \frac{d}{dt} f(\{q_j\},t)$ (13.36)

wobei $f(\dots)$ beliebige Fkt. ist

Beweis: „Übungen"

(i) Setze $L + \frac{d}{dt}f$ in (*) ein $\longrightarrow$ f fällt raus

(ii) $S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L + \frac{d}{dt} f\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt + f(t_2) - f(t_1)$



$$\delta S = 0 \longrightarrow 0 = \int \delta L\, dt + \underbrace{\delta f(t_2)}_{=0} - \underbrace{\delta f(t_1)}_{=0}$$

$$= \int \delta L\, dt \quad \text{qed}$$

14. Hamiltonsche Mechanik

• Motivation:

– Lagrange Mechanik: $\{q_1, \dots, q_f\}$ .... generalisierte Koord.

Lagrange Fkt: $L = L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \longrightarrow$

Lagrange Bewgl: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

$\longrightarrow q_j = q_j(t)$

aber: dynam. Zustand zur Zeit ist nur eindeutig festgelegt, bei Kenntnis von

$\underbrace{\{q_j(t)\}, \{\dot{q}_j(t)\}}_{\text{Satz von } 2f \text{ unabhängige Variable}}$

– Hamiltonsche Mechanik

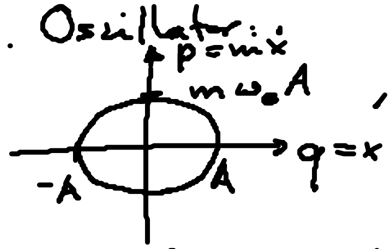
wähle $\{q_i(t)\}, \{p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\}$ als Satz von $2f$ unabh. Variablen

$\longrightarrow$ Hamilton-Fkt. ?

Hamiltonschen Bew. Gln. ?

• $\boxed{\begin{array}{l} \text{Phasenraum } \Gamma: \\ \text{(i) wird aufgespannt durch } \{q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f\} \mathrel{\hat{=}} 2f \text{ Dimensionen} \\ \text{(ii) Punkt in } \Gamma \mathrel{\hat{=}} \text{eindeutiger Zustand eines Systems} \\ \text{(iii) Bahn in } \Gamma \mathrel{\hat{=}} \text{Zeitentwicklung " "} \end{array}}$

Bsp: harm. Oszillator:



, ω_0 ... Eigenfrequenz

- wichtig! $\longrightarrow$ tiefere Einsichten in die Struktur der Mechanik

$\longrightarrow$ statistische Mechanik

$\longrightarrow$ Zugang zur „Quantisierung von mechan. Systemen"

14.1 Legendre Transformation

• **Ziel**: $\{q_1 \cdots q_f, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_f\} \longrightarrow \{q_1 \cdots q_f, p_1 \cdots p_f\}$

Theorie mit gleicher Info!?

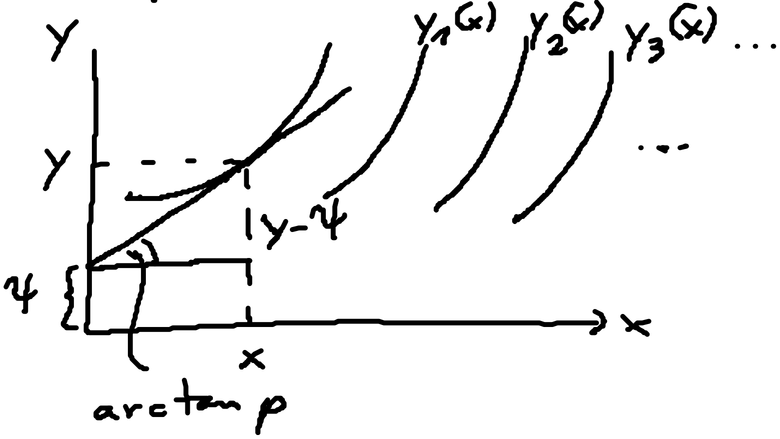
<u>1-dim. allg. Fall</u>

• Geg.: allg. Fkt. $y = y(x)$ mit $p(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$ $\xrightarrow[\text{existiere}]{\text{Umkehrung}}$ $x = x(p)$

$\frac{dy}{dx}$!

später: L $\qquad \dot{q}_j \qquad p_j$

$$\longrightarrow \quad y = y(x(p)) = y(p)$$

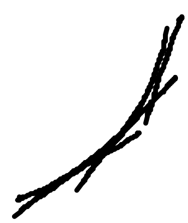


• **Frage**: $y(p) \longrightarrow y(x)$?

$\xleftrightarrow[\text{Umkehrung}]{}$ $x = x(y)$!

Antwort: <u>nein</u>, denn $y(p) \hat{=}$ <u>Kurvenschar</u> $y_i(x)$ als Lsg von $\frac{dy}{dx} = p(y)$

• Ausweg: $y(x)$ ist Einhüllende seiner <u>Tangentschar</u>



Tangentenschar ist eindeutig bestimmt durch $p, \psi(p) \ldots$

Ordinatenabschnitt

$\longrightarrow$ <u>Legendre-Transformation</u>

mit $p = \frac{y - \psi}{x} \longrightarrow \boxed{\psi(p) = y(p) - p\,x(p)}$ (14.1)

... Legendre-Transformierte von $y(x)$

mit Differential: $d\psi = \cancel{dy} - \cancel{p\,dx} - x\,dp$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\partial \psi}{\partial p}}$$

"aus ψ wieder x gewonnen!"

- Umkehrung:

$$\psi(p) \longrightarrow x = -\frac{\partial \psi}{\partial p} \xrightarrow[\text{kehr}]{\text{Um-}} p = p(x) \xrightarrow[(14.1)]{\text{in}} \boxed{\begin{aligned} y(x) &= y(p(x)) \\ &= \psi(p(x)) + p(x)\,x \end{aligned}} \;!!$$

$$(14.3)$$

- Anwendung auf $y = y(x_1, \dots, x_n)$ entsprechend!
- wichtig in Thermodynamik!