14. Hamiltonsche Mechanik

- Ziel: $\{q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s\} \longrightarrow \{q_1 \dots q_s, p_1, \dots p_s\}$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$$

- allg. Betrachtung:

  $y(x)$ mit $p(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$

  tausche x durch p aus!

$\longrightarrow$ Legendre Transformation [Kap. 14.1]

$$\boxed{\psi(p) = y(p) - p\,x(p)} \quad (14.1)$$

$$\boxed{x = -\frac{\partial \psi}{\partial p}} \quad (14.2)$$

14.2. Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

- Legendre-Transformation der Lagrange-Fkt.:

  also: Austausch aller $\dot{q}_j$ durch $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

$$\longrightarrow \boxed{H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)} \quad (13.30)$$

... Hamilton-Fkt. [vgl. Kap. 13.5 b)]

NB: Minuszeichen $\hat{=}$ Konvention

- Berechne:

  Differential: $dH \overset{1.S.}{\underset{(13.30)}{=}} \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$

$$\overset{\text{r.S.}}{\underset{(13.30)}{=}} \sum_j \Big(\dot q_j\, dp_j + \cancel{p_j\, d\dot q_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \dot p_j} dq_j - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}_{= p_j} d\dot q_j}\Big) - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt$$

$$= \sum_j \left(-\dot p_j\, dq_j + \dot q_j\, dp_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt$$

Vergleich der Vorfaktoren von dq_j, dp_j, dt:

vgl. (14.2)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot q_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot p_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}} \quad (14.4)$$

$=\frac{\partial L}{\partial q_j}$!

... Hamiltonsche (kanonische) Gln.
$2f$ Dgln. 1. Ordnung in t für q_j und p_j
(dieselbe Aussagekraft wie die Lagrangesche Gln. 2. Art.!)

& $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}} \quad (14.5)$$

a) Erhaltungssätze & physikal. Bedeutung von H

(i) Energieerhaltung:

- totale Zeitableitung:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \Big(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j}}_{=-\dot p_j} \dot q_j + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{=\dot q_j} \dot p_j\Big) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \overset{(14.5)}{=} -\frac{\partial L}{\partial t}} \quad (14.6)$$

(1) H ... Konstante der Bewegung für $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

(2) $H = T + U$ (13.35)
... Gesamtenergie für $\frac{\partial \vec r_i}{\partial t} = 0$ [vgl. Kap. 13.5b]

(ii) zyklische Koordinaten: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$! (13.28)

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow p_j = \alpha = \text{konst.}} \quad (14.7)$$

NB: $H = H(q_1 \cdots q_{j-1}\, q_{j+1} \cdots p_1 \cdots p_{j-1}, \alpha, p_{j+1} \cdots, t)$

mit $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$

H hat nur $2f-2$ Variablen

L " $2f-1$ " (kann $\dot{q}_j$ noch enthalten)

b) Beispiele:

(i) Teilchen in 3D: $q_i = x_i$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\longrightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \\ &\longrightarrow \boxed{H = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(x_1, x_2, x_3)} \end{aligned}$$

(ii) Bewegung im Zentralfeld: ebene Bewegung: ρ, φ (14.8)

- $H = T + U(\rho)$ mit $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$

$$\left.\begin{aligned} \longrightarrow p_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{p_\rho}{m} \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \end{aligned}\right.$$

$$\longrightarrow \boxed{H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}}_{\substack{\text{Zentrifugal-}\\\text{potential}}} + U(\rho)} \quad (14.9)$$

$[p_\varphi = \text{konst}]$

• Bew.gln:

$$\dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow p_\varphi = \text{konst.} \ldots \text{Drehimpuls} = \text{Konstante der Bewegung}$$

$$\dot p_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow H = E \ldots \text{Energie} = \text{Konstante der Bewegung}$$

Lösung: s. Kap. 6.3

$$\rho(\varphi) \longrightarrow \rho(t), \varphi(t)$$

(iii) Teilchen im em Feld: $q_i = x_i$ ... kartesische Koord.

- $L = \frac{m}{2}\sum_i \dot x_i^2 - q\varphi + q\sum_i A_i \dot x_i$ (12.36)
- general. Impuls: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} = m\dot x_i + qA_i$ (13.25)
- Hamilton fkt.: $H = \sum_i p_i \dot x_i - L \underset{(13.25)}{=} \sum_i m \dot x_i^2 + q\sum_i A_i \dot x_i - L$

$$= \sum_i \left(\frac{m}{2}\dot x_i^2\right) + q\varphi$$

$$\longrightarrow \boxed{H \underset{(13.25)}{=} \sum_i \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\varphi} \quad (14.10)$$

NB: (14.10) aus (14.P) durch Minimalsubstitution:

$$\boxed{p_i \rightarrow p_i - qA_i} \quad (14.11)$$

14.3. Methode der Poisson-Klammer

• Observable / Meßgröße:

$$\boxed{A = A(\underbrace{\{q_j\}, \{p_j\}}_{\substack{\text{bestimmen Zustand} \\ \text{des Systems eindeutig!}}}, t)} \quad (14.12)$$

(i) Observable = „QM-Slang"

(ii) Bsp: H, q_j, p_j, Schwerpkts koord. / -impuls

a) Zeitentwicklung von A: klar, wenn $\frac{dA}{dt}$ bekannt

$$\frac{dA}{dt} = \sum_j \Big(\frac{\partial A}{\partial q_j} \underbrace{\dot{q}_j}_{= \frac{\partial H}{\partial p_j}} + \frac{\partial A}{\partial p_j} \underbrace{\dot{p}_j}_{= -\frac{\partial H}{\partial q_j}} \Big) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}} \quad (14.13)$$

mit $\boxed{\{A, H\} = \sum_j \Big(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \Big)}$ (14.14)

... Poisson Klammer

Spezialfall:

$$A = q_k \xrightarrow[\frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \delta_{kj}, \ \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = 0]{(14.13)/(14.14)} \dot{q}_k = \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$A = p_k \xrightarrow[\frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{kj}, \ \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0]{} \dot{p}_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

(14.4) Hamilt. Bew.gln.

b) formalen Eigenschaften: Rechnen!

$$\boxed{\{A, B\} = \sum_j \Big(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \Big)} \quad (14.15)$$

... Poisson-Klammer

(i) Antisymmetrie: $$\boxed{\{A,B\} = -\{B,A\}} \tag{14.16}$$

$$\rightarrow \boxed{\{A,A\} = 0} \tag{14.17}$$ ... nicht kommutativ

(ii) Linearität:
$$\boxed{\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} = c_1 \{A_1, B\} + c_2 \{A_2, B\}} \tag{14.18}$$

(iii) „Nullelement": $$\boxed{\{c, A\} = 0} \tag{14.19}$$
Konstante

(iv) Produktregel: $$\boxed{\{A, BC\} = \{A,B\}C + B\{A,C\}} \tag{14.20}$$

NB: „Beachte Stellung von C bzw B!"

Beweise: (i)–(iv) durch Einsetzen