15. Hamilton-Jacobische Theorie

- nur Skizzierung!
- Grundidee:

Ges: kanonische Trafo auf

$$\boxed{\begin{aligned} Q_k &= \beta_k = \text{konst} \overset{\text{z.B.}}{=} q_k(0) \\ P_k &= \alpha_k = \text{konst.} = p_k(0) \end{aligned}} \quad (15.1)$$

2f Integrationskonst. des Systems

damit: Hamilton. Bewgl.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \\ (14.4) \quad 0 &= \dot{P}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \\ \text{mit } \bar{H} &= H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \text{o.B.d.A} \quad \boxed{\bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0} \quad (15.2)$$

- erzeugende Fkt. 2 [vgl. Kap. 14.5]

$$\boxed{F_2\left(\{q_j\}, \{P_j\} = \{\alpha_j\}, t\right) = S\left(\{q_j\}, \{\alpha_j\}, t\right)} \quad (15.3)$$

... Hamilton-Jacobische Wirkungsfkt. (Hamiltonsche Prinzipal Fkt.)

mit $\boxed{p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}}$ (14.43)

in (15.2) $\longrightarrow$ $$\boxed{H\left(\{q_j\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_j}\right\}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \quad (15.4)$$

... Hamilton-Jacobische-Dgl. für S!

Bem.:

Hamiltonsche Theorie
Löse 2f gewöhnl. Dgl. 1. Ord. in Zeit

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$\xleftrightarrow[\text{zu}]{\text{äquivalent}}$

Hamilton-Jacobische Theorie
S als Lsg. von (15.4): nichtl. partielle Dgl. 1. Ordnung in f+1 Variablen q_j, t

• Eigenschaften von S:

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\overset{(15.2)}{=} -H} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_j}}_{\overset{(15.3)}{=} p_j} \dot{q}_j = -H + \sum_j p_j \dot{q}_j \overset{(13.20)}{=} L$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt} \quad !!! \quad (15.5)$$

• Anschluß an die QM:

S = konst.
= Wellenfronten im Ortsraum $\{q_j\}$
Geschw.: $c = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}$

$\xleftrightarrow[\text{zu}]{\text{Analogie}}$

Grenzfall der geometr. Optik für Lichtwellen

$\downarrow\uparrow$

$\lambda |\nabla n| \ll n$

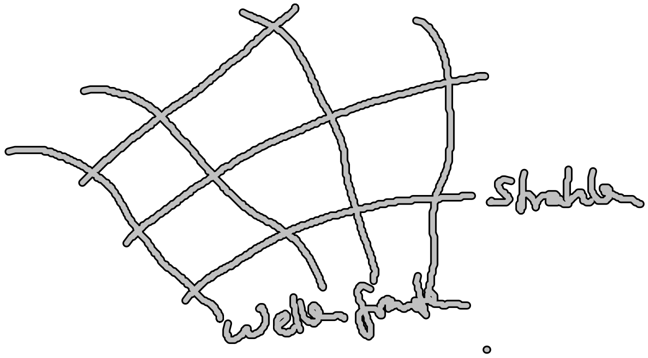
Schrödingersche Wellenmechanik

Wellengl. für Lichtwellen

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = 0$$

ϕ ... skalares em. Potential

n(r)



IV. Spezielle Relativitätstheorie

• Einstein (1905)

16. Die Lorentz-Transformationen

• Trafo von IS $\longrightarrow$ IS'

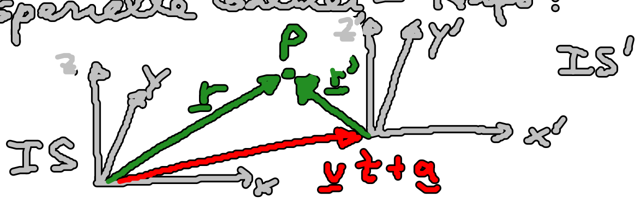
16.1. Situation vor Einstein

a) Galileisches Relativitätsprinzip:

> Alle IS (in ihnen gelten die Newtonschen Axiome) sind gleichwertig = die Newtonschen Axiome sind „forminvariant" (= kovariant) unter Galileitransf.

Trafo von IS $\to$ IS'

• spezielle Galilei-Trafo:



"boost" in x-Richtung

$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t - \underline{g} \quad (16.2) \quad \xrightarrow[\underline{v} = v\underline{e}_x,\ \underline{g} = 0]{\text{o.B.d.A}} \quad \boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}} \quad (16.3)$$

Zeit läuft absolut

• Addition von Geschw.:

$$\underline{v}_0 \text{ in IS} \xrightarrow[\frac{d}{dt}(16.2)]{} \underline{v}' = \underline{v}_0 - \underline{v} \text{ in IS}' \quad (16.4)$$

b) Licht = eine Welle: vor Einstein: „verwirrende Tatsache"

- Maxwell-Gln.: $\longrightarrow$ Wellengl. für Lichtwellen:

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\underline{E} = 0 \quad (16.5) \quad [\text{vgl. } (11.24) \text{ für Saite}]$$

$\underline{E}$: elektr. Feld

c: Lichtgeschw. unabhängig von IS !

also: Kugelwelle in IS $\longrightarrow$ Kugelwelle in IS'

- Maxwell-Gln. nicht invariant unter Galilei-Trafo!

- Ätherhypothese: $\boxed{\text{Licht bewegt sich mit } c \text{ in einem "elastischen Medium", darf keine „Schallwellen" = longitudinale Wellen erlauben!}}$

Äther = IS: c, Kugelwelle

IS': $\underline{c} - \underline{v}$, keine Kugelwelle! ↯ Maxwell-Gln.

- Michelson-Morley-Exp.

$\boxed{\text{gleiches } c \text{ auf Erde \& im Weltraum}}$

$\longrightarrow$ Erklärungsversuche von Lorentz & Fitzgerald: „Lorentzkontraktion"

16.2. Einsteins Relativitätsprinzip

$\boxed{\text{Alle IS sind gleichwertig} = \text{alle physikal. Gesetze sind kovariant unter Lorentztrafo}}$ (16.6)

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Die Lichtgeschw. } c \text{ ist unabh. von IS}}$ (16.7)

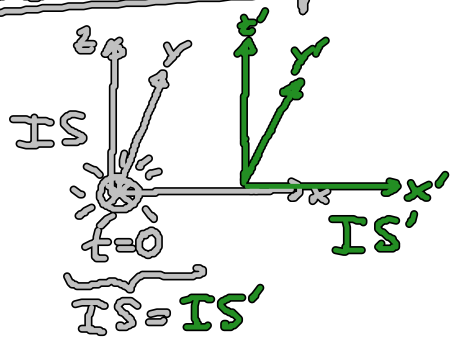
$\longrightarrow$ neue Struktur der Raumzeit!

bisher: Euklid. Raum
& absolute Zeit

jetzt:

16.3 Der Minkowski-Raum

• Gedanken-Exp.:



Ausbreitung eines Licht-pulses (bei t=0)

in IS: $-c^2t^2 + \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2} = 0$

in IS': $-c^2t'^2 + \underbrace{x'^2+y'^2+z'^2}_{r'^2} = 0$ (16.8)

Zeit in IS'!

• lineare Trafo: $\{\underline{r}, t\} \longrightarrow \{\underline{r}', t'\}$

Grund: $\underline{r} = 0 \longrightarrow \underline{r}' = 0$

also: (16.8) $\longrightarrow$ $-c^2t^2 + r^2 = \lambda(\underline{v})\,[-c^2t'^2 + r'^2]$

(i) $\lambda(\underline{v}) = \lambda(v)$ ... Isotropie des Raumes

(ii) IS → IS' → IS: $\lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda = +1$ (−) keine Stetigkeit für $v \to 0$

$$\boxed{-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (16.9)$$

... Norm im Minkowski-Raum ist Lorentz-Skalar

• Minkowski-Raum = 4D Raumzeit

(kontravariante) Vierervektoren: $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$, Komp: x^α, $\alpha = 0,1,2,3$

$[x^0 = ct]$