26. 10. 2007

Heute zwei Kolloquia !

16^{00} h (mit Stehempfang)
17^{00} h (mit Stehempfang)

$$x^\mu = (ct, \underline{x})$$ Kontra

$$x_\mu = (ct, -\underline{x})$$ Ko

variante 4er Vektor

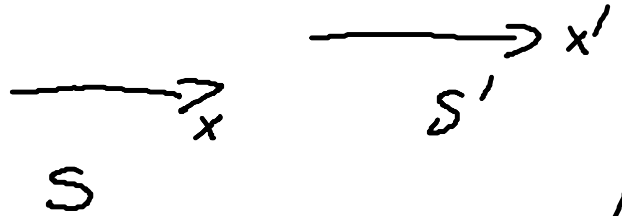
Relativ. Skalarprodukte

$x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \underline{x}^2$ bleibt invariant
unter Lorentztrafos

$$g_{\nu\mu} = g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

„Hoch" und „Herunterziehen" $\quad x_\nu = g_{\nu\mu} \underbrace{x^\mu}_{\text{Summation}}$

"Lorentztrafo"



Geschwindigkeit $\underline{v} = v\underline{e}_x$

$\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu, \quad L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

- Invarianz von $x_\mu x^\mu$ bei Lorentztransformation

In S': $\quad x'_\nu x'^\nu = g_{\nu\mu} x'^\mu x'^\nu =$

$$= \sum_{\mu\alpha\beta\nu} \underbrace{g_{\nu\mu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta}_{g_{\alpha\beta} \text{ (Nachrechnen)}} x^\alpha x^\beta$$

$$= g_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = x_\beta x^\beta$$

- Gradient: $\partial^\nu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ kontravarianter Gradient

$\partial_\nu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$ kovarianter Gradient

Dirac-Gleichung aus

$$i\, \partial/\partial t\, \psi = \hat{H}\psi \ , \quad \hat{H} = \underline{\alpha}\,\underline{p} + \beta m$$

$$\Leftrightarrow \left(i\,\partial/\partial t - \underline{\alpha}\,\frac{1}{i}\,\underline{\nabla} - \beta m\right)\psi = 0 \quad / \ \beta \cdot \text{ von links}$$

$$\left(i\gamma^0\,\partial/\partial t + i\sum_{k=1}^{3}\gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - m\right)\psi = 0 \qquad \beta^2 = 1,\ \beta = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \beta \ , \quad \gamma^k = \beta\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial/\partial t = \partial_0 \ ; \quad \partial/\partial x^k = \partial_k$$

$$\boxed{\left(i\gamma^\nu \partial_\nu - m\right)\psi = 0} \qquad \text{Dirac-Gleichung}$$

- Relativistische Invarianz zeigen:

Wir fordern die gleiche Form der Dirac-Gleichung in zwei Systemen S und S', die sich gleichf. gegen bewegen.

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\Psi = 0 \quad \text{in } S$$

$$(i\gamma'^\nu \partial'_\nu - m')\Psi' = 0 \quad \text{in } S'$$

In beiden Systemen $m = m'$: gleiche Ruhmasse

$$\gamma'^\nu = \gamma^\nu$$

Aber: $\partial_\nu \neq \partial'_\nu$ und $\Psi \neq \Psi'$

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{(L^{-1})^\nu{}_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (L^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$$

(Ableitung)

Also muß gelten

$$\partial'_\nu = (L^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu$$

$$(i\gamma^\nu \partial'_\nu - m)\Psi' = 0 \implies \underline{(i\gamma^\nu (L^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu - m) S\Psi = 0}$$

$$\Psi' = S\Psi$$

S: 4x4-Matrix

S^{-1} von links

$$\Rightarrow \quad i\underbrace{\left(S^{-1}\gamma^{\nu}S\right)\left(L^{-1}\right)^{\mu}{}_{\nu}}_{4\times 4\ \text{Matrix}}\partial_\mu\Psi - m\Psi = 0$$

Vergleich: $$i\underbrace{\gamma^\alpha}\partial_\alpha\Psi - m\Psi = 0$$ im System (fr[illegible]end')

$\Rightarrow$ Fordere $$\boxed{S^{-1}\gamma^{\nu}S = L^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\beta}}$$

Damit $$i\, L^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\beta}\underbrace{\left(L^{-1}\right)^{\mu}{}_{\nu}}_{\delta_\beta{}^\mu}\partial_\mu = \underbrace{\gamma^\beta\partial_\beta}$$

Wir benötigen $$\boxed{S^{-1}\gamma^{\nu}S = L^{\nu}{}_{\beta}\gamma^{\beta}} \qquad (1.48)$$

für die relativistische Invarianz.

- Konstruktion der Matrix S aus (1.48).

Ansatz: Für kleine $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$

Extremfall $\beta = 0 \Rightarrow S = \underline{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$

Nächste Korrektur der Ordnung $O(\beta)$: dann „Taylorentwicklung" der Matrix

$$S = S(\beta) = \underline{\mathbb{1}} + \beta\frac{1}{2}\gamma^1\gamma^0 + \frac{\beta^2}{2!}\ldots$$

$$= \mathbb{1} - \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\beta^2)$$

Für beliebiges β bekommt man jetzt die Matrix $S(\beta)$ durch Exponentiieren

$$S(\beta) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{N}\gamma^1\gamma^0\right)^N = e^{\frac{\beta}{2}\gamma^1\gamma^0}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = e^x$$

Damit für alle β:

$$e^{\hat{x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{x}^k$$ Exponentialfunktion einer Matrix

tiefe Mathematik: Lie gruppen, Lie algebren

Ausrechnen: $$\boxed{S(\beta) = \cosh\frac{\beta}{2}\,\mathbb{1} + \sinh\frac{\beta}{2}\,\gamma^1\gamma^0}$$

- Kontinuitätsgleichung

Viererstromdichte $$j^\mu \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Psi$$

z.B $\gamma^0\gamma^0 = 1$

$$j^0 = \Psi^\dagger \Psi$$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \qquad (1.58)$$

- ist ebenfalls Lorentz-invariant
- $j'^\mu = L^\mu{}_\nu \, j^\nu$

4er-Strom transformiert sich wie kontravarianter Vektor

(AUFGABE)

7. Lösungen der Dirac-Gleichung (freies Teilchen)

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\Psi = 0 \iff \left[i\left(\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right) - m\right]\Psi = 0$$

a) Separationsansatz

$$\psi(\underline{x}, t) = e^{-iEt}\,\phi(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \left[E\gamma^0 + i\left(\gamma^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots\right) - m\right]\phi(\underline{x}) = 0$$

Ansatz $\phi(\underline{x}) = \phi = \text{const}$

$$\Rightarrow \left[E\gamma^0 - m\right]\phi = 0 \quad , \; E \neq 0$$

$$\gamma^0\phi = \frac{m}{E}\phi$$

Eigenwertgleichung

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \phi = \frac{m}{E} \phi$$ hat zwei Eigenwerte

$$\underbrace{\frac{m}{E} = +1}_{\underline{\underline{E = mc^2}}} \Rightarrow \phi_+ = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m}{E} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

positive Energie

$$\underbrace{\frac{m}{E} = -1}_{E = -mc^2} \Rightarrow \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

negative Energie

Diskussion:

- $$\Psi_+(\underline{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = +mc^2$$

beschreibt ruhendes Teilchen der Masse m, Ruheenergie $E = mc^2 > 0$

– Zwei Komponenten u_1, u_2

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

beschreiben Spin $\frac{1}{2}$ des Teilchens

– Dirac-Gleichung beschreibt Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen

- $$\Psi_-(x, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Big\} \text{unten} \qquad E = -mc^2$$

hat negative Energie.
Interpretationsproblem wie bei der KG gl.

Zufriedenstellend gelöst erst in der Quantenfeldtheorie (Teilchen-Erzeugung und Vernichtung) und die zweite Quantisierung.

„Anschauliche Interpretation":

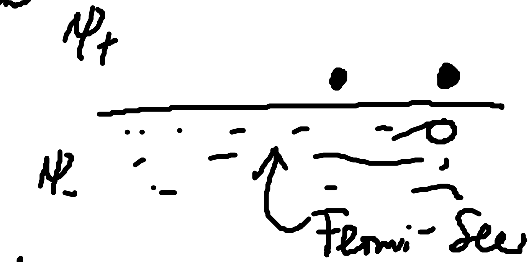
Dirac'sche Löchertheorie * C. ITZYKSON
J-B ZUBER
„Quantum Field Theory"

– Annahme vieler gleichartiger Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Masse m.

– Annahme: alle Zustände Ψ_- mit negativer Energie sind besetzt.

Das definiert einen „Grundzustand" („Vakuum").

– Ein einzelnes Elektron ist dann z.B. das Vakuum + 1 Teilchen in einem Zustand Ψ_+.



– „Teilchen-Loch-Anregung"

Anregung von Ψ_- nach Ψ_+, lässt „Loch" im Fermi-See zurück (positive Ladung (fehlende negative Ladung)).

– ähnl. Konzept z.B. in der Halbleiterphysik
Valenzband

Leistungen

VORTEILE des Löchertheorie : – Voraussage des Positrons

– Paarvernichtung / Erzeugung

NACHTEILE der Löchertheorie :

– Unendl. „See" nicht beobachtbarer Teilchen

– Beruht auf Pauli-Prinzip und funktioniert nicht mit der KG gleichung die Bosonen mit Spin 0 beschreibt.