31.10.2007

$$\left(i\partial_\mu \gamma^\mu - m\right)\Psi = 0$$

$$\Psi_\pm(\underline{x},t) = e^{\mp i \overbrace{\left(Et - \underline{k}\,\underline{x}\right)}^{x^\mu k_\mu}} \phi_\pm(E,\underline{k})$$

$$E = \sqrt{\underline{k}^2 + m^2} > 0$$

$$k_\mu = \left(k_0, -k_x, -k_y, -k_z\right) \qquad k_0 = E$$

$$\left(\gamma^0 E - \gamma^1 k_x - \dots - m\right)\phi_+ = 0 \Leftrightarrow \left(\gamma^\mu k_\mu - m\right)\phi_+ = 0$$

$$\left(-\gamma^0 E + \gamma^1 k_x + \dots - m\right)\phi_- = 0 \overset{(-1)}{\Leftrightarrow} \left(\gamma^\mu k_\mu + m\right)\phi_- = 0$$

Gleichungen für Spinoren (4-komponentige Vektoren)

$\phi_\pm$. Trick:

$$\left(\gamma^\mu k_\mu + m\right)\left(\gamma^\mu k_\mu - m\right) = \underbrace{\gamma^\mu k_\mu \gamma^\nu k_\nu}_{k_0^2 (\gamma^0)^2 + \dots} - m^2 = E^2 - \underline{k}^2 - m^2 = 0$$

1) $$\underbrace{\left(\gamma^\mu k_\mu - m\right)\left(\gamma^\nu k_\nu + m\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\phi}_+} = 0$$

$$\tilde{\phi}_+ = (E+m)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - k_x \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}} - k_y \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \end{pmatrix} \dots$$

$$- k_y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma_y \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (E+m)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \underline{k}\,\underline{\sigma}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\underline{k}\,\underline{\sigma} = k_x \sigma_x + k_y \sigma_y + k_z \sigma_z$$

$$\underbrace{(\gamma^\mu k_\mu + m)(\gamma^\nu k_\nu - m)\begin{pmatrix}0\\0\\u_1\\u_2\end{pmatrix}} = 0$$

$$\nu = 0: \quad E\gamma^0 \begin{pmatrix}0\\0\\u_1\\u_2\end{pmatrix} = E \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\u_1\\u_2\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}0\\0\\-u_1\\-u_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -(E+m)\begin{pmatrix}0\\0\\u_1\\u_2\end{pmatrix} - k_x \begin{pmatrix}0 & \sigma_x\\ -\sigma_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\u_1\\u_2\end{pmatrix} - \dots$$

$$= - \begin{pmatrix} \underline{k}\,\underline{\sigma} \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \\ (E+m)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = -\tilde{\phi}_-$$

Insgesamt 4 linear unabh. Lösungen

Basis:

$$\phi_+^{(1)} = N \begin{pmatrix}(E+m)\,\underline{u}^{(1)} \\ \underline{k}\,\underline{\sigma}\;\underline{u}^{(1)}\end{pmatrix}$$

$$\phi_+^{(2)} = N \begin{pmatrix}(E+m)\,\underline{u}^{(2)} \\ \underline{k}\,\underline{\sigma}\;\underline{u}^{(2)}\end{pmatrix}$$

$\underline{u}^{(1)}$, $\underline{u}^{(2)}$ Basis des $\mathbb{C}^2$

z.B. $\underline{u}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\underline{u}^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Grenzfall $\underline{k}=0 \Rightarrow \quad \phi_+^{(1,2)} = \mathcal{N}(E+m)\begin{pmatrix} \underline{u}^{(1,2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Teilchen

$$\phi_-^{(1,2)} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} \underline{k}\,\underline{\sigma}\ \underline{u}^{(1,2)} \\ \\ (E+m)\ \underline{u}^{(1,2)} \end{pmatrix}$$

Grenzfall $\underline{k}=0 \Rightarrow \quad \phi_-^{(1,2)} = \mathcal{N}(E+m)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{u}^{(1,2)} \end{pmatrix}$

Antiteilchen (Löcher)

$\mathcal{N}$: Normierungsfaktor.

Häufig $\left|\underline{u}^{(i)}\right| = 1$, $i=1,2$

$\underline{u}^{(1)}\cdot\underline{u}^{(2)}=0$

8. Helizität und Spin

Zur Erinnerung: Spin $\frac{1}{2}$, $\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

Vektor der Pauli-Matrizen.

treten auf in $\underline{k}\cdot\underline{\sigma}$ in den Dirac-Spinoren $\phi_\pm^{(i)}$.

$\uparrow z$

$$\hat{k} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{k}\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

AUFGABE

Eigenvektoren von $\hat{k}\underline{\sigma}$: $\underbrace{|\uparrow, \hat{k}\rangle}_{\text{2-Komp. Vektor}}$, $\underbrace{|\downarrow, \hat{k}\rangle}_{\text{2-Komp. Vektor}}$

EW sind ± 1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition: Helizitätsoperator

$$\hat{k}\underline{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \hat{k}\underline{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{k}\underline{\sigma} \end{pmatrix}$$

Die Spinoren $\phi_\pm^{(i)}$ als Eigenvektoren von $\hat{k}\underline{\Sigma}$:

Hierzu $\underline{u}^{(1)} = |\uparrow, \hat{k}\rangle$, $\underline{u}^{(2)} = |\downarrow, \hat{k}\rangle$

Damit sieht die Basis der $\phi_\pm^{(i)}$ so aus:

$$\phi_+^{(\sigma)}(\underline{k}) = N \begin{pmatrix} (E+m)\,|\sigma, \hat{k}\rangle \\ \underline{k}\underline{\sigma}\,|\sigma, \hat{k}\rangle \end{pmatrix}$$

$\sigma = \uparrow$ „positive Helizität"

$\sigma = \downarrow$ „negative Helizität"

$$\phi_-^{(\sigma)}(\underline{k}) = N \begin{pmatrix} \underline{k}\underline{\sigma}\,|\sigma, \hat{k}\rangle \\ (E+m)\,|\sigma, \hat{k}\rangle \end{pmatrix}$$

Wir haben $\underbrace{\underline{k}\hat{\Sigma}}_{4\times 4} \underbrace{\phi_\pm^{(\sigma)}}_{4\text{ komp.}}(\underline{k}) = \sigma\, \phi_\pm^{(\sigma)}(\underline{k})$

$$\begin{pmatrix} \underline{k}\underline{\sigma} & 0 \\ 0 & \underline{k}\underline{\sigma} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{k}\underline{\sigma}\,|\sigma\hat{k}\rangle \\ (E+m)\,|\sigma,k\rangle \end{pmatrix}$$

Zusammenfassend:

Wir haben drei <u>Quantenzahlen</u>

$\underline{k}$ Wellenvektor

$\pm$ Teilchen/Antiteilchen

σ $\pm 1 \mathrel{\hat{=}} \uparrow, \downarrow$

Der Helizitätsop. $\hat{k}\Sigma$ kommutiert mit dem Dirac-Hamiltonian $\hat{H} \equiv \underline{\alpha}\underline{p} + \beta m$ (AUFGABE) $\Rightarrow$ Die Eigenfkt von $\hat{H}$ (d.h. die Eigenfkt der freien Diracgleichung) können als Eigenfkt. von $\hat{k}\Sigma$ gewählt werden.

<u>9. Ausblick</u>

Graphen!

$$k\Sigma = \begin{pmatrix} \overset{2\times 2}{k\underline{\sigma}} & 0 \\ 0 & k\underline{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\underline{k}\,\underline{\sigma} = k_x \underbrace{\sigma_x}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} + \cdots$$

Kapitel II: Formaler Aufbau der QM

Ein Anfang der QM ist der Kommutator

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

(Check!) $\hat{x}$: Ortsoperator

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{Impulsoperator}$$

$$\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2 \qquad \text{Unschärferel.}$$

QM Zustände, WF $\Psi(x)$ sind Elemente eines Hilbertraums,

Operatoren $\hat{=}$ Messgrößen.

1) Hilbertraum

Def: Ein Hilbertraum ist ein vollständiger unitärer Raum

Def: Ein Vektorraum mit Skalarprodukts $\langle\phi|\Psi\rangle$ und Norm $\|\Psi\| = \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ heißt unitärer Raum

Def: Eine Norm eines komplexen Vektorraums V ist eine Abbildung $V \to \mathbb{R}_+$, so dass für $\phi, \psi \in V$ gilt

a) $\|\psi\| \geq 0$, $\|\psi\| = 0 \Longleftrightarrow \psi = 0$

b) $\|c\psi\| = |c| \, \|\psi\|$, $c \in \mathbb{C}$

c) $\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$.

Def: Ein Skalarprodukt eines Vektorraums V ist eine Abb. $V, V \mapsto \mathbb{C}$ mit

$$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$$

$$\langle\psi + \phi | \chi\rangle = \langle\psi|\chi\rangle + \langle\phi|\chi\rangle$$

$$\langle\psi | c\phi\rangle = c\langle\psi|\phi\rangle \qquad c \in \mathbb{C}$$

! Rausziehen aus rechter Seite

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* \equiv \overline{\langle\phi|\psi\rangle}$$

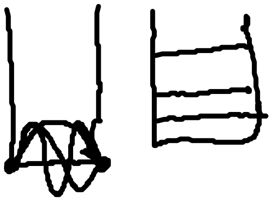
Def: Eine Folge $\{\psi_n\}$ in einem normierten Raum heißt Cauchy-Folge, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (ganz) so dass $\forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon$.

Def: Ein unitärer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt vollständig.

Beispiele: a) Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$

n-dimensionaler komplexer VR

b) HR $\mathcal{H}_2$ der quadratintegrierbaren WF eines Potentialtopfes mit ∞ hohen Wänden in 1d



$$\psi(x) = 0 \quad \text{für } x = 0, L$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_n''(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad E_n = \frac{(\hbar n \pi)^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- $$\langle \psi | \phi \rangle = \int_0^L dx\, \psi^*(x)\, \phi(x)$$

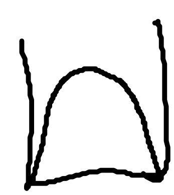
$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$$

- Vollst.: $$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n | \phi \rangle \psi_n(x) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_2$$

Fourier-Reihe

vgl: $$\underline{x} = \sum_{n=1}^{d} \langle \underline{e}_n | \underline{x} \rangle \underline{e}_n \qquad \underline{x} \in \mathbb{C}^d$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$



Def: $\{\psi_n\}$ vollständiges Orthonormalsystem eines HR $\mathcal{H}$ (VOS)

$$\Leftrightarrow \langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$$

und $$\phi = \sum_n \langle \psi_n | \phi \rangle \psi_n, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

Satz: (Parseval):

$$\phi = \sum_n \langle \psi_n | \phi \rangle \psi_n$$

$$\|\phi\|^2 = \sum_n |\langle \psi_n | \phi \rangle|^2 .$$

$|\phi\rangle$ Kets

$\langle \phi|$ Bra

$\langle \phi | \phi \rangle$

Bra-chets

Bem: Vollständige normierte Räume heißen Banach-Räume.

- Funktionalanalysis