

21.11.

Korrektur Aufgabe 21, 2. : (Blatt 6)

Zustände $|m, \hat{n}\rangle$

statt

$|m, \hat{e}_z\rangle$

!

21.11.

Zee man - Aufspaltung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathcal{H} \Psi, \quad \mathcal{H} = \frac{(\underline{p} - e\underline{A})^2}{2m} + e\phi(r)$$

Feld für H-Atom $\phi(r) \propto \frac{1}{r}$ $-\frac{e\hbar}{2m} \underline{\sigma} \cdot \underline{B}$, Pauli-Gleichung

Magnetfeld mit Vektorpotential

$$\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{B} \times \underline{r}, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$$

(Coulomb-Eichung)

Umformung

$$\frac{1}{2m} \left(\underline{p}^2 - e \left(\underline{A} \underline{p} + \underline{p} \underline{A} \right) + e^2 \underline{A}^2 \right) =$$

$$= \quad \underline{A} \underline{p} \text{ wegen } \underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0 \quad \underline{p} = \frac{\hbar}{i} \underline{\nabla}$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\underline{p}^2 - e 2 \underline{A} \underline{p} + e^2 \underline{A}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2m} \underline{p}^2 - \frac{e}{m} \frac{1}{2} (\underline{B} \times \underline{r}) \underline{p} + \frac{1}{8} \frac{e^2}{m} (\underline{B} \times \underline{r})^2$$

Zyklisch

$$(\underline{r} \times \underline{p}) \cdot \underline{B}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

\underline{L} Drehimpuls

Damit insgesamt

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\underline{p}^2}{2m} + e\phi(r)}_{\text{Wasserstoff-Atom ohne B-Feld}} + \frac{\mu_B}{\hbar} \underbrace{(\underline{L} + \hbar \underline{\sigma}) \cdot \underline{B}}_{\text{Bahndrehimpuls } \underline{L} + \text{Spin}} + \frac{e^2}{8m} (\underline{B} \times \underline{r})^2$$

Wasserstoff-Atom
ohne B-Feld

Bahndrehimpuls \underline{L}
+ Spin

$$\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m} \quad \text{Bohr-Magneton.}$$

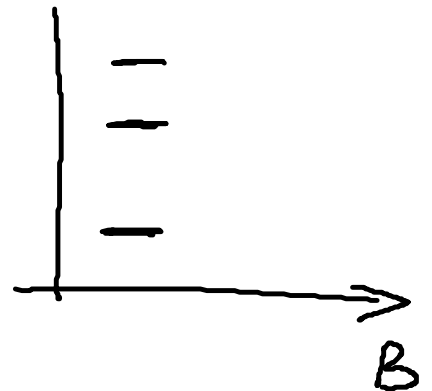
Jetzt die Änderung des Spektrums durch das \underline{B} -Feld berechnen.

1) Annahme: \underline{B} -Feld sehr klein,
vernachlässige $(\underline{B} \times \underline{r})^2$

$$2) \hat{H} = H_0 + V; \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + e\phi(r)$$

$$V = \frac{\mu_B}{\hbar} (\underline{L} + \hbar \underline{\sigma}) \underline{B}$$

$|nlm\rangle$ Eigenzustände von H_0
mit Energien E_n^0



mit Spin:

$$|nlm\sigma\rangle \equiv \underbrace{|nlm\rangle}_{\text{Bahn}} \otimes \underbrace{|\sigma\rangle}_{\text{Spin}}$$

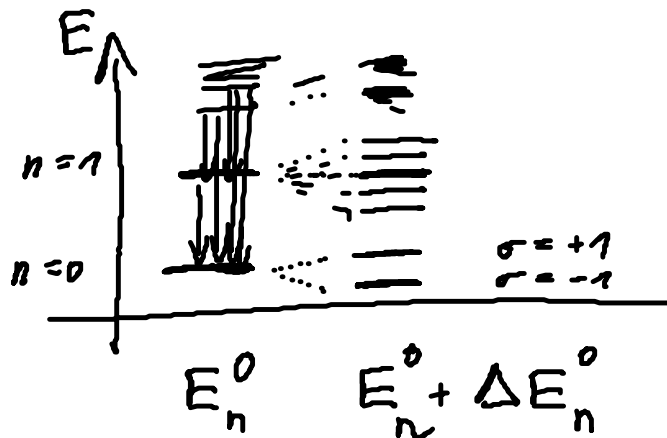
Spin: Spin-Eigenzustand
von $\underline{\sigma} \frac{\underline{B}}{|\underline{B}|}$

$H |n l m \sigma\rangle$ berechnen:

Zugehörige Energien $E_{nlm\sigma} = E_n^0 + \mu_B B (m + \sigma) + O(B^2)$

$n=0$: $m=0, \sigma = \pm 1$

$n=1$: $m=0, \pm 1, \sigma = \pm 1$



$$\Delta E_{n=1}^0 = \mu_B B (m + \sigma)$$

σ	$m=0$	$m=1$	$m=-1$
$\sigma=+1$	1	2	0
$\sigma=-1$	-1	0	-2

Durch das Magnetfeld wird die ursprüngliche Entartung der Niveaus aufgehoben.

(teilweise)

3.7. Addition von Drehimpulsen

$$\vec{J}_1 + \vec{J}_2 \equiv \vec{J}$$

gesamt-Drehimpuls

$$J^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle$$

$$J_z |j m\rangle = \hbar m |j m\rangle$$

$$J_1^2 |j_1 m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1\rangle$$

$$J_{1,z} |j_1 m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle$$

Basis $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = \text{span } \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$

Basis $|j m\rangle = \text{span } \mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2; \quad \dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{K}_1 \cdot \dim \mathcal{K}_2$$

Beispiel $j_1 = l, j_2 = s = \frac{1}{2}$

Wellenfunktionen $|l m \sigma\rangle = |l m\rangle \cdot |\sigma\rangle$

$$l=1: \quad Y_{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_{1,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{1,1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_{1,-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{1,-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

j_1 und j_2 als gegeben.

- Eigenzustände $|j m\rangle$ sind auch EZ von J_1^2 und J_2^2 .

$$\Rightarrow |j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m \rangle |j_1, m_1\rangle \cdot |j_2, m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, m_2 | j, m \rangle |m_1, m_2\rangle$$

$\sum_{m_1, m_2} \langle m_1, m_2 | j, m \rangle |m_1, m_2\rangle = \mathbb{1}$

Clebsch-Gordan Koeffizienten.

Rekursion für Clebsch-Gordan-Koeff.

1) $F_z \equiv F_{1z} + F_{2z}$ anwenden

$$F_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, m_2 | j, m \rangle (m_1 + m_2) |m_1, m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, m_2 | j, m \rangle m |m_1, m_2\rangle$$

$$\langle m_1, m_2 | j, m \rangle = \delta_{m_1 + m_2, m} \langle m_1, m - m_1 | j, m \rangle$$

z-A. zahlen addieren sich.

2) Anwendung von F_{\pm}

$$F_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

$$= \sum \langle m_1, m_2 | j, m \rangle \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} |m_1 \pm 1, m_2\rangle$$

$$+ \sum_{m_1, m_2} \langle m_1, m_2 | j m \rangle \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)} | m_1, m_2 \pm 1 \rangle$$

Skalar mit $\langle m_1, m_2 |$ multipl.

\Rightarrow Rekursionsformel herleiten :

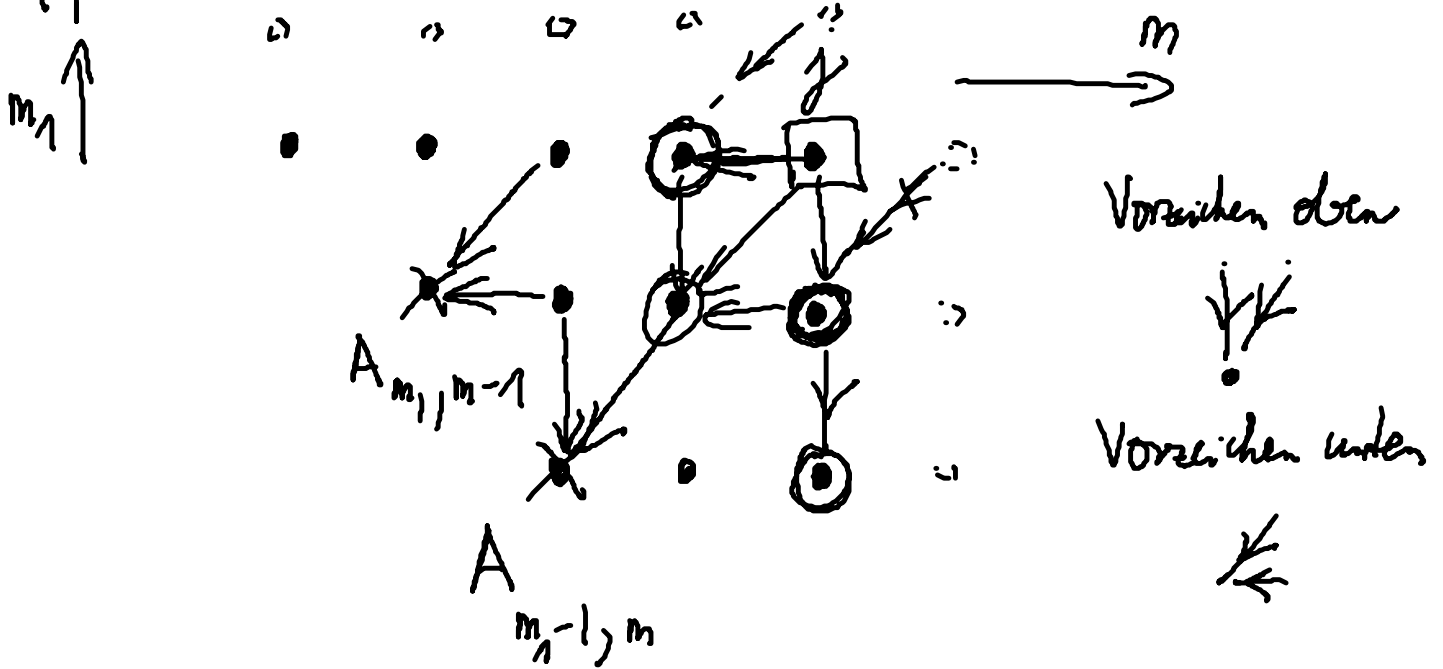
$$\begin{aligned} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \langle m_1, m_2 | j m \pm 1 \rangle &= \\ &= \langle m_1 \mp 1, m_2 | j m \rangle \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)} \\ &+ \langle m_1, m_2 \mp 1 | j m \rangle \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)} \end{aligned}$$

Wir fixieren j : CG Koeff. sind
 größer mit zwei Indizes m_1, m_2 ,

$A_{m_1, m_2} \Rightarrow \langle m_1, m_2 | j m \rangle$
 Rekursion hat Struktur

$$\| a A_{m_1, m} + b A_{m_1 \neq 1, m} + c A_{m_1, m \pm 1} = 0 \|$$

Aufspalten als Rekursion auf Rechteck-fitter



\square $A_{m_1=j_1, m=j}$ festlegen \Rightarrow alle festgelegt.
 $m_1=j_1$ maximale Wert für m_1 , $m=j$ maximal
 $\langle j_1, m_2 = j - j_1, j, j \rangle$

$$-j_2 \leq m_2 = j - j_1 \leq j_2$$

$$\Rightarrow \| j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2 \|$$

Dieser Konstr. $1 \Leftrightarrow 2$

$$\| j_2 - j_1 \leq j \leq j_1 + j_2 \|$$

$$\Rightarrow |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

„Dreiecks-Bedingung“

j läuft also über $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$

Anzahl der Kets $|j_m\rangle =$

OK!

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1) - (2j_2+1)$$

↑ Nachrechnen