Nächsten Mittwoch 5.12.07
12^{00} – Vorstellungsvortrag Astrophysik
statt QM-Vorlesung
hier im E-W 203!

30.11.2007

4.2.5. Die Bloch-Sphäre

Spin 1/2.

Dichteoperator $\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$

in Diagonaldarstellung,

allgemein 2×2 Matrix $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Jetzt schreiben als

$$\boxed{\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\underline{1\!\!1} + \underline{p}\,\underline{\sigma}\right)}, \qquad \underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$$

reeller Vektor

$$\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{1\!\!1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spur: $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$.

Eigenwerte λ_1, λ_2 von $\hat{\rho}$. Produkt $\lambda_1 \lambda_2 = \det \hat{\rho}$.

$$\det \hat{\rho} = \det \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_2 \\ ip_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & -p_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \det \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & 1 - p_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(1+p_3)(1-p_3) - (p_1 + ip_2)(p_1 - ip_2)\right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ 1 - p_3^2 - p_2^2 - p_1^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - p^2 \right) = \lambda_1 \lambda_2$$

Es gilt: a) $\hat{\rho} \geq 0$ positiv definit $\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$

$$\Rightarrow (1 - p^2) \geq 0 \Rightarrow p^2 \leq 1$$

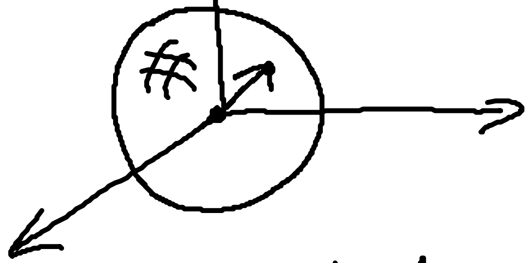
b) Wenn $|p|^2 \leq 1 \Rightarrow \hat{\rho}$ ist Dichte-operator.

Beweis: $|p|^2 \leq 1 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$

Es gilt $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ deshalb können die λ_i nicht beide negativ sein $\Rightarrow \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$

$\Rightarrow \hat{\rho}$ positiv definit.

Satz: Es gibt eine 1-zu-1 Beziehung zwischen allen Dichtematrizen eines Spin $\frac{1}{2}$ und den Punkten der Einheitskugel „Bloch-Sphäre" $|p| \leq 1$.



AUFGABE: Die reinen Zustände $\hat{\rho}$ entsprechen den Punkten $|\vec{p}| = 1$, d.h. der Oberfläche der Bloch-Sphäre.

4.3. Zusammengesetzte Systeme

System aus N Teilsystemen.
QM: durch das Tensorprodukt der Hilberträume der Einzelsysteme beschrieben,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N,$$

enthält Zustände der Form

$$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \ldots \otimes |n_N\rangle + |n_1'\rangle \otimes |n_2'\rangle \otimes \ldots \otimes |n_N'\rangle + \ldots$$

(Linearkombinationen).

Beispiel: $N = 2$
Spin $1/2$

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \right)$$

verschränkte Zustände.

$\Longleftrightarrow$ reine Tensoren, d.h. Tensoren der Form $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.

Beispiel: Ortsraum-Wellenfunktionen.

$$\mathcal{H}_1 = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{mit} \quad \psi_\alpha(\underline{x}_1)$$

quadratintegrierbare WF,

d.h. $\int d^3x \, |\psi(x)|^2$ muß existieren.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$: Wellenfunktionen

$$\underbrace{\psi_{\alpha_1}(\underline{x}_1) \cdot \psi_{\alpha_2}(\underline{x}_2) \cdots \psi_{\alpha_N}(\underline{x}_N)}_{\text{reiner Tensor}}$$

$$+ \psi_{\beta_1}(\underline{x}_1) \cdots \psi_{\beta_N}(\underline{x}_N) + \dots$$

$$+ \dots = \sum_{n_1 \dots n_N = 1}^{\infty} \psi_{n_1}(\underline{x}_1) \cdots \psi_{n_N}(\underline{x}_N) \cdot c_{n_1 n_2 \dots n_N}$$

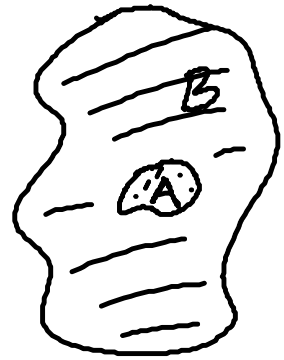
4.3.1 Fall N=2: Bipartite Systeme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Beispiel: 1) $\mathcal{H}_A$ für Ortswellenfunktion
$\mathcal{H}_B$ für Spinoren.

2) $\mathcal{H}_A \ \hat{=}$ System

$\mathcal{H}_B \ \hat{=}$ (Wärme) Bad



Das Gesamtsystem befinde sich in einem Zustand (reiner Zustand)

$$|\psi\rangle = \underbrace{\sum_{ab} c_{ab} \underbrace{|a\rangle \otimes |b\rangle}_{\text{reiner Tensor}}}_{\text{reiner Zustand}}$$

$\{|a\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_A$

$\{|b\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_B$

Die Matrix c, $(c)_{ab} = c_{ab}$ ist i.A. rechteckig,

$$c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ c_{M1} & \cdots & c_{MN} \end{pmatrix}, \quad \dim \mathcal{H}_A = M, \quad \dim \mathcal{H}_B = N$$

4.3.2 Reduzierte Dichtematrix

Information wird „ausreduziert"

$\Rightarrow$ A wird durch Dichteoperator ρ_A

Universum = System A + Rest B

beschrieben.

$$|\psi\rangle = \sum_{ab} c_{ab}\, |a\rangle \otimes |b\rangle$$

Nur an Observablen $\hat{A}$ des Systems $\hat{A}$ interessiert.

Wie wirkt $\hat{A}$ auf $|\psi\rangle$?

$$\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{ab} c_{ab}\, \hat{A}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

wirkt als Einheitsoperator auf B,

d.h. $\hat{A} = \hat{A} \otimes \mathbb{1}$.

Erwartungswert von $\hat{A}$ im Zustand $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\,\hat{A}\otimes\mathbb{1}\,|\psi\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{ab\\a'b'}} c^*_{ab}\, c_{a'b'} \underbrace{\langle b|\otimes\langle a|\,\hat{A}\otimes\mathbb{1}\,|a'\rangle\otimes|b'\rangle}_{\delta_{bb'}}$$

$$= \sum_{aa'b} c^*_{ab}\, c_{a'b}\, \langle a|\hat{A}|a'\rangle$$

$$= \mathrm{Tr}_A\, \hat{\rho}_A \hat{A}, \quad \text{mit}$$

$$\hat{\rho}_A \equiv \sum_{aa'b} c^*_{ab}\, c_{a'b}\, |a'\rangle\langle a|$$

[$$\mathrm{Tr}_A\, \hat{\rho}_A \hat{A} = \sum_{a''aa'b} \langle a''| \underbrace{c^*_{ab}\, c_{a'b}\, |a'\rangle}\langle a|\hat{A}|a''\rangle$$

$$= \sum_{aa'b} c^*_{ab}\, c_{a'b} \langle a|\hat{A}|a'\rangle \quad \| \qquad \delta_{a'a''}$$

$\hat{\rho}_A$ ist Dichteoperator:

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B\, |\psi\rangle\langle\psi| =$$

$$= \sum_{a'b'ab} c_{a'b'}\, c^*_{ab}\, \mathrm{Tr}_B \Big(\underbrace{\underbrace{|a'\rangle \otimes |b'\rangle}_{|\phi\rangle} \; \underbrace{\langle b| \otimes \langle a|}_{\langle\phi'|}}_{\propto\, \delta_{bb'}} \Big)$$

$$= \sum_{a'ab} c_{a'b}\, c^*_{ab}\, |a'\rangle\langle a|$$

$$\mathrm{Tr}_B\, |b'\rangle\langle b| = \sum_{b''} \underbrace{\langle b''|b'\rangle}_{\delta_{b''b'}} \underbrace{\langle b|b''\rangle}_{\delta_{bb''}}$$

$$= \delta_{bb'} \,. \qquad \delta_{bb'}$$

Weitere Eigenschaften: (AUFGABE).

$$\rho_A = \rho_A^\dagger$$

$$\mathrm{Tr}\,\rho_A = 1 \quad , \quad \rho_A \geq 0.$$

$\Rightarrow \quad \rho_A$ ist Dichteoperator.

Dieser Dichteoperator ist durch „Ausspuren" über das Bad B zustande gekommen,

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B\,|\Psi\rangle\langle\Psi| \quad ,$$

wird als „reduzierter Dichteoperator".

$\hat{\rho}_A$ enthält nur Information über das System A.

Die Spurbildung Tr_B vernichtet die Information des System B.

Analog zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$p(x_1, \dots, x_N)$ N Zufallsvariablen.

$\Rightarrow$ Reduzierte W-Verteilung

z.B $p_1(x_1) = \int dx_2\, dx_3 \dots dx_N\, p(x_1, \dots, x_N)$.

$$\int dx_1 \dots dx_N \, p(x_1 \dots x_N) = 1 .$$

4.3.3. Reine und verschränkte Zustände

Definition: Zustände eines bipartiten Systems $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ heissen reine Tensoren (separabel), falls sie sich in der Form

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B \qquad \text{reiner Tensor.}$$

schreiben lassen.
Zustände $|\psi\rangle$, die sich nicht in dieser Form schreiben lassen, heißen verschränkt.

Fall $|\psi\rangle$ separabel: $\mathrm{Tr}_B \left(|\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B \, {}_B\langle\phi'| \otimes {}_A\langle\phi| \right)$

$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B$

$$= |\phi\rangle_A \, {}_A\langle\phi| \; \underbrace{\mathrm{Tr}_B \, |\phi'\rangle_B \, {}_B\langle\phi'|}_{1 \text{ wenn } |\phi'\rangle \text{ normiert}}$$

$$= |\phi\rangle_A \, {}_A\langle\phi|$$

$$= P_{|\phi\rangle_A}$$

$\Rightarrow$ Wenn $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ separabel (reiner Tensor), dann ist $\hat{\rho}_A \equiv \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ ein reiner Zustand, d.h. $\hat{\rho}_A^{\,2} = \rho_A$.

Wenn $|\psi\rangle$ verschränkt ist, dann gilt nicht mehr $\rho_A^2 = \rho_A$,

$|\psi\rangle$ verschränkt $\Longrightarrow$ ρ_A gemisch

$|\psi\rangle$ separabel (reiner Tensor) $\Longrightarrow$ ρ_A rein

$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

Beispiele: a) 2 Qubit, $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^2$

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle_A|0\rangle_B + b\,|1\rangle_A|1\rangle_B$$

$\Rightarrow$ $|\psi\rangle\langle\psi|$ ausrechnen

$$\Rightarrow \quad \rho_A = |a|^2\, |0\rangle_A {}_A\langle 0| + |b|^2\, |1\rangle_A {}_A\langle 1|$$

$$= \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$