

Nächsten Mittwoch 5.12.07

12⁰⁰ -

Vorstellungsvortrag Astrophysik

statt QM-Vorlesung

hier im E-W 203!

30.11.2007

4.2.5. Die Bloch-Sphäre

Spin 1/2.

Dichtematrix $\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$

in Diagonaldarstellung,

allgemein

2x2 Matrix

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Jetzt schreiben als

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\underline{1} + \underline{p} \underline{\sigma}) \quad \underline{p} = (p_1, p_2, p_3) \\ \text{reeller Vektor}$$

$$\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Spur: } \text{Tr} \hat{\rho} = 1.$$

Eigenwerte λ_1, λ_2 von $\hat{\rho}$. Produkt $\lambda_1 \lambda_2 = \det \hat{\rho}$.

$$\det \hat{\rho} = \det \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ip_2 \\ ip_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_3 & 0 \\ 0 & -p_3 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \det \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+p_3 & p_1-ip_2 \\ p_1+ip_2 & 1-p_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ (1+p_3)(1-p_3) - (p_1+ip_2)(p_1-ip_2) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \{ 1 - p_3^2 - p_2^2 - p_1^2 \}$$

$$= \frac{1}{4} (1 - p^2) = \lambda_1 \lambda_2$$

Es gilt: a) $\hat{\rho} \geq 0$ positiv definit $\Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$

$$\Rightarrow (1 - p^2) \geq 0 \Rightarrow p^2 \leq 1$$

b) Wenn $|p|^2 \leq 1 \Rightarrow \hat{\rho}$ ist Dichteoperator.

Beweis: $|p|^2 \leq 1 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$

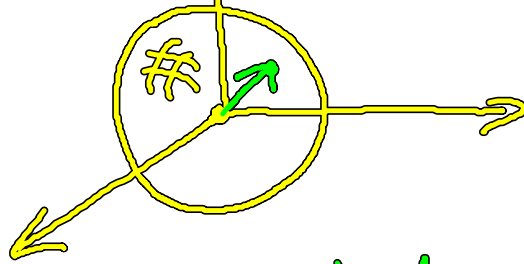
Es gilt $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ deshalb

können die λ_i nicht beide negativ

sein $\Rightarrow \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$

$\Rightarrow \hat{\rho}$ positiv definit.

Satz: Es gibt eine 1-zu-1 Beziehung zwischen allen Dichtematrizen eines Spins $\frac{1}{2}$ und den Punkten der Einheitskugel „Bloch-Sphäre“ $|p| \leq 1$.



AUFGABE: Die reinen Zustände $\hat{\rho}$ entsprechen den Punkten $|\rho| = 1$, d.h. der Oberfläche der Bloch-Sphäre.

4.3. Zusammengesetzte Systeme

System aus N Teilsystemen.

QH: durch das Tensorprodukt der Hilberträume der Einzelsysteme beschreiben,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N,$$

enthält Zustände der Form

$$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_N\rangle + |n'_1\rangle \otimes |n'_2\rangle \otimes \dots \otimes |n'_N\rangle + \dots$$

(Linearkombinationen).

Beispiel: $N = 2$
Spin $1/2$

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \right)$$

verschränkte Zustände.

\Leftrightarrow reine Tensoren, d.h. Tensoren
der Form $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.

Beispiel: Ortsraum-Wellenfunktionen.

$$\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^3) \text{ mit } \psi_{d_1}(\underline{x}_1)$$

quadratintegrierbare WF,

d.h. $\int d^3x |\psi(x)|^2$ muß existieren.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$: Wellenfunktionen

$$\underbrace{\psi_{d_1}(\underline{x}_1) \cdot \psi_{d_2}(\underline{x}_2) \cdot \dots \cdot \psi_{d_N}(\underline{x}_N)}_{\text{reiner Tensor}}$$

$$+ \psi_{\beta_1}(\underline{x}_1) \cdot \dots \cdot \psi_{\beta_N}(\underline{x}_N) + \dots$$

$$+ \dots = \sum_{n_1 \dots n_N=1}^{\infty} \psi_{n_1}(\underline{x}_1) \cdot \dots \cdot \psi_{n_N}(\underline{x}_N) \cdot c_{n_1 n_2 \dots n_N}$$

4.3.1 Fall $N=2$: Bipartite Systeme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Beispiel : 1) \mathcal{H}_A für Ortswellenfunktion
 \mathcal{H}_B für Spinoren.

2) $\mathcal{H}_A \triangleq$ System
 $\mathcal{H}_B \triangleq$ (Wärme) Bad



Das Gesamtsystem befindet sich in einem Zustand (reiner Zustand)

$$|\Psi\rangle = \sum_{ab} c_{ab} |a\rangle \otimes |b\rangle$$

reiner Tensor

$\{|a\rangle\}$ VOS in \mathcal{H}_A reiner Zustand

$\{|b\rangle\}$ VOS in \mathcal{H}_B

Die Matrix c , $(c)_{ab} = c_{ab}$ ist i.A. rechteckig,

$$c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M1} & \dots & c_{MN} \end{pmatrix}, \text{ dim } \mathcal{H}_A = M$$

$$\text{dim } \mathcal{H}_B = N$$

4.3.2 Reduzierte Dichtematrix

Information wird "ausreduziert"
 \Rightarrow A wird durch Dichteoperator ρ_A



Universum = System A + Rest B

beschrieben.

$$|\psi\rangle = \sum_{ab} c_{ab} |a\rangle \otimes |b\rangle$$

Nur an Observablen \hat{A} des Systems A interessiert.

Wie wirkt \hat{A} auf $|\psi\rangle$?

$$\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{ab} c_{ab} \hat{A}|a\rangle \otimes |b\rangle$$

wirkt als Einheitsoperator auf B ,

$$\text{d.h. } \hat{A} = \hat{A} \otimes \mathbb{1}.$$

Erwartungswert von \hat{A} im Zustand $|\psi\rangle$:

$$\langle \psi | \hat{A} \otimes \mathbb{1} | \psi \rangle =$$

$$= \sum_{\substack{ab \\ a'b'}} c_{ab}^* c_{a'b'} \underbrace{\langle b | \otimes \langle a | \hat{A} \otimes \mathbb{1} | a' \rangle \otimes | b' \rangle}_{\delta_{bb'}}$$

$$= \sum_{aa'b} c_{ab}^* c_{a'b} \langle a | \hat{A} | a' \rangle \quad ||$$

$$= \text{Tr}_A \hat{\rho}_A \hat{A}, \text{ mit}$$

$$\hat{\rho}_A = \sum_{aa'b} c_{ab}^* c_{a'b} |a'\rangle \langle a|$$

$$\Gamma \quad \text{Tr}_A \hat{\rho}_A \hat{A} = \sum_{a''aa'b} \underbrace{\langle a'' | c_{ab}^* c_{a'b} | a' \rangle}_{\text{}} \langle a | \hat{A} | a'' \rangle$$

$$L = \sum_{aa'b} c_{ab}^* c_{a'b} \delta_{a'a} \langle a | \hat{A} | a' \rangle \quad ||$$

\hat{P}_A ist Dichtoperator:

$$\hat{P}_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi| =$$

$$= \sum_{a'b'ab} c_{a'b'} c_{ab}^* \text{Tr}_B \left(\underbrace{|a'\rangle\langle b|}_{|\phi\rangle} \otimes \underbrace{\langle b|\langle a|}_{\langle\phi|} \right)$$

$$= \sum_{a'ab} c_{a'b} c_{ab}^* |a'\rangle\langle a| \delta_{bb'}$$

$$\text{Tr}_B |b'\rangle\langle b| = \sum_{b''} \underbrace{\langle b''|b'\rangle}_{\delta_{b''b'}} \underbrace{\langle b|b''\rangle}_{\delta_{bb''}}$$

$$= \delta_{bb'} \cdot \delta_{bb'}$$

Weitere Eigenschaften: (AUFGABE).

$$P_A = P_A^\dagger$$

$$\text{Tr } \rho_A = 1, \quad \rho_A \geq 0.$$

$\Rightarrow \rho_A$ ist Dichteoperator.

Dieser Dichteoperator ist durch „Aussparen“ über das Bad B zustande gekommen,

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

wird als „reduzierter Dichteoperator“.

$\hat{\rho}_A$ enthält nur Information über das System A.

Die Spurbildung Tr_B vernichtet die Information des Systems B.

Analog zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$$P(x_1, \dots, x_N) \quad N \text{ Zufallsvariablen.}$$

\Rightarrow Reduzierte W-Verteilung

$$\text{z.B. } p_1(x_1) = \int dx_2 dx_3 \dots dx_N P(x_1, \dots, x_N).$$

$$\int dx_1 \dots dx_N \rho(x_1 \dots x_N) = 1.$$

4.3.3. Reine und verstränkte Zustände

Definition: Zustände eines bipartiten Systems

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_A \otimes \mathcal{K}_B$ heißen reine Tensoren
(separabel), falls sie sich in der Form

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B \quad \text{reiner Tensor.}$$

schreiben lassen.

Zustände $|\psi\rangle$, die sich nicht in dieser Form
schreiben lassen, heißen verstränkt.

Fall $|\psi\rangle$ separabel: $\text{Tr}_B \left(|\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B \langle\phi'| \otimes \langle\phi| \right)$

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B$$

$$= |\phi\rangle_A \langle\phi| \underbrace{\text{Tr}_B |\phi'\rangle_B \langle\phi|}_{1 \text{ wenn } |\phi'\rangle \text{ normiert}}$$

$$= |\phi\rangle_A \langle\phi|$$

$$= P_{|\phi\rangle_A}$$

\Rightarrow Wenn $|\psi\rangle \in \mathcal{X}_A \otimes \mathcal{X}_B$ separabel (reiner Tensor),
dann ist $\hat{\rho}_A \equiv \text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ ein reiner Zustand,
d.h. $\hat{\rho}_A^2 = \rho_A$.

Wenn $|\psi\rangle$ verschränkt ist, dann
gilt nicht mehr $\rho_A^2 = \rho_A$,

$|\psi\rangle$ verschränkt $\Rightarrow \rho_A$ gemischt

$|\psi\rangle$ separabel
(reiner Tensor) $\Rightarrow \rho_A$ rein

$$\mathcal{X}_A \otimes \mathcal{X}_B$$

Beispiele: a) 2 Qubit, $\mathcal{X}_A = \mathbb{C}^2, \mathcal{X}_B = \mathbb{C}^2$

$$|\psi\rangle = a |0\rangle_A |0\rangle_B + b |1\rangle_A |1\rangle_B$$

$\Rightarrow |\psi\rangle\langle\psi|$ ausrechnen

$$\Rightarrow \rho_A = |a|^2 |0\rangle\langle 0| + |b|^2 |1\rangle\langle 1|$$

$$= \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$