7.12.

7.12.07

## 4.5. Verschränkung

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left( |\uparrow, \hat{z}\rangle_A \cdot |\downarrow; \hat{z}\rangle_B - |\downarrow, \hat{z}\rangle_A \, |\uparrow; \hat{z}\rangle_B \right)$$

$\hat{z} \equiv \hat{e}_z$ Einheitsvektor, also z.B.

$$|\uparrow, \hat{z}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow, \hat{z}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zwei Spins auf Atomen A und B

1) Atome wechselwirken, Spin (Gesamtspin) sei danach im Zustand $|S\rangle$

2) Atome werden voneinander getrennt, Spin ändert sich nicht.

3) Beobachter A (Alice) nimmt Atom A nach Amsterdam.
Beobachter B (Bob) nimmt Atom B nach Berlin.
Orte A, B beliebig weit voneinander entfernt.

Sehr viele Paare A, B im Gedankenexperiment.

Jetzt Messungen.

a) Alice misst ihren Spin in $\hat{z}$-Richtung.
Findet A z.B. Spin $|\Uparrow, \hat{z}\rangle_A$, so muß

Bob Spin $|\downarrow, \hat{z}\rangle_B$ messen.

b) Alice misst ihren Spin in $\hat{z}$-Richtung.
Bob misst seinen Spin in $\hat{x}$-Richtung und bekommt $|\uparrow, \hat{x}\rangle_B$ bzw. $|\downarrow, \hat{x}\rangle_B$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, unabhängig davon, was Alice misst.

c) Alice misst ihren Spin in $\hat{x}$-Richtung.
Falls sie $|\uparrow, \hat{x}\rangle_A$ findet,
muß Bob $|\downarrow, \hat{x}\rangle_B$ finden:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow, \hat{n}\rangle_A |\downarrow, \hat{n}\rangle_B - |\downarrow, \hat{n}\rangle_A |\uparrow, \hat{n}\rangle_B \right).$$

Bob's Messergebnisse hängen davon ab, ob und wie (in welche Richtung) Alice misst, obwohl beide raumartig voneinander getrennt sind.

Bobs Zustand ist durch seine Dichtematrix (reduzierte Dichtematrix) beschrieben)

$$\hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A |S\rangle\langle S| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

keine Information! $\uparrow$ oder $\downarrow$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit..

Es gibt Korrelationen zwischen den Messergebnissen in A und denen in B.
Allerdings lassen sich damit keine Informationen übertragen.

<u>Def.:</u> „Einstein-Lokalität": Die gesamte Physik in B sollte nur lokal durch den Spin B gegeben sein und nicht mehr davon abhängig sein, was in A (raumartig getrennt) passiert.

Eine vollständige Beschreibung der Physik in B sollte ergeben, dass Spin B nicht mit Spin A korreliert ist.

$\Longrightarrow$ QM wäre danach eine unvollständige Beschreibung der Natur.

<u>Def.:</u> Versteckte-Variablen-Theorien:
Ein Spin $|\uparrow\rangle$ (in $\hat{n}$-Richtung) wird durch $|\uparrow, \hat{n}; \{\lambda\}\rangle$ beschrieben, wobei $\{\lambda\}$ unbekannte Parameter sind. Wäre $\{\lambda\}$ bekannt, so wären alle Messwerte des Spins deterministisch.

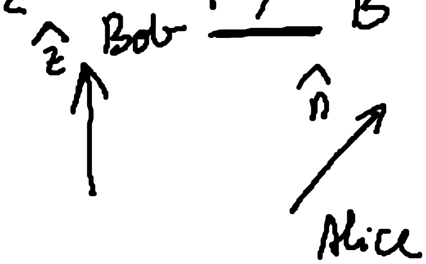
## <u>Bellsche Ungleichungen</u>

A misst Spin in $\hat{n}$-Richtung:

Falls $|\uparrow, \hat{n}\rangle_A \Longrightarrow |\downarrow, \hat{n}\rangle_B$

Falls $|\downarrow, \hat{n}\rangle_A \Longrightarrow |\uparrow, \hat{n}\rangle_B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}_B$

$$\left\| \, |\uparrow, \hat{n}\rangle_B = \underline{\cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2}}\, |\uparrow, \hat{z}\rangle_B + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\varphi/2}\, \underline{|\downarrow, \hat{z}\rangle_B} \, \right\|$$




Wahrscheinlichkeit (gemeinsame Ereignisse)

$$W(\downarrow_A, \uparrow_B) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$= W(\uparrow_A, \downarrow_B)$$

$$W(\downarrow_A, \downarrow_B) = \frac{1}{2} \sin^2\frac{\theta}{2}$$

<u>Versteckte Variablen-Theorien:</u>

3 Richtungen $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$

Variablen legen fest, ob + oder − ($\uparrow$ oder $\downarrow$) in Richtung $\hat{a}$ (oder $\hat{b}$, oder $\hat{c}$) gemessen wird.

<u>Tabelle:</u>

Teilchen A      Teilchen B

| | | |
|---|---|---|
| $N_1$ | $(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}+)$ | $(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}-)$ |
| $N_2$ | $(\hat{a}+, \hat{b}+, \hat{c}-)$ | $(\hat{a}-, \hat{b}-, \hat{c}+)$ |
| $N_3$ | $(a+\ b-\ c+)$ | $(a-\ b+\ c-)$ |
| $N_4$ | $(a+\ b-\ c-)$ | $(a-\ b+\ c+)$ |
| $N_5$ | | |
| $N_6$ | | |
| $N_7$ | $(a-\ b-\ c+)$ | $(a+\ b+\ c-)$ |
| $N_8$ | | |

8 relative Häufigkeiten

$$p_i = \frac{N_i}{\sum_{i=1}^{8} N_i}, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

<u>Beispiel:</u> Gesamtsystem im Zustand 3:

Alice $\hat{a}+$

Bob $\hat{a}-$ $\hat{b}+$ etc.

Wir können Wahrscheinlichkeiten

$$P(\underset{\uparrow \atop \text{Alice}}{\hat{a}+};\ \underset{\uparrow \atop \text{Bob}}{\hat{b}+}) = p_3 + p_4$$

$$P(\hat{a}+;\hat{c}+) = p_2 + p_4$$

$$P(\hat{c}+;\hat{b}+) = p_3 + p_7$$

Es gilt $p_i \geq 0$; deshalb

$$p_3 + p_4 \leq \underbrace{p_3 + \underbrace{p_4 + p_2} + p_7}$$

$$\Rightarrow \quad P(\hat{a}+;\hat{b}+) \leq P(\hat{a}+,\hat{c}+) + P(\hat{c}+;\hat{b}+)$$

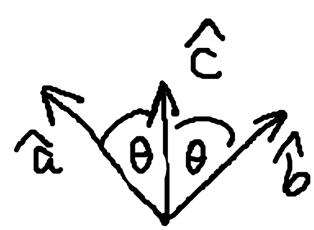
Ist eine Form der <u>Bellschen Ungleichungen</u>.

$$P(\hat{a}+,\hat{b}+) \;\hat{=}\; W(\uparrow\hat{a},\uparrow\hat{b}) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{\hat{a}\hat{b}}}{2},$$

wobei $\theta_{\hat{a}\hat{b}} = \sphericalangle(\hat{a},\hat{b})$ ist.

Wir zeigen: die qm. Wahrscheinlichkeiten verletzen die Bellschen Ungleichungen.

$$\theta_{\hat{a}\hat{b}} = 2\theta$$




$$\theta \equiv \theta_{\hat{a}\hat{c}} = \theta_{\hat{c}\hat{b}}.$$

Mit $P = W$

AUFGABE. $\sin^2\theta \leq \sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

↯ für $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ QM ist im Widerspruch mit verdeckten-Variablen-Theorien.

Aspect: Experiment mit verschränkten Photonen (1982)

$\Rightarrow$ Verletzung der Bellschen Ungleichungen.
also kein Widerspruch zu QM.

Lit: J.J. Sakurai