

Zeitabhängige Störungstheorie

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

↑ zeitabh. Störung

Schrödingers-Gleichung $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle$ (*)

Wechselwirkungsbild:

Definition: $|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\Psi(t)\rangle$ (**)

Jetzt Sgl. für $|\Psi(t)\rangle_I \Leftrightarrow$ 'interaction picture' (Dirac-Bild)

$$\frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I = iH_0 |\Psi(t)\rangle_I +$$

$$+ e^{iH_0 t} \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle$$

(*) einsetzen k=1

$$= iH_0 |\Psi(t)\rangle_I + e^{iH_0 t} (-i) [H_0 + V(t)] |\Psi(t)\rangle$$

$$= \underbrace{iH_0 |\Psi(t)\rangle_I}_{\text{Null}} - i \underbrace{e^{iH_0 t} [H_0 + V(t)]}_{\text{Null}} \underbrace{e^{-iH_0 t} |\Psi(t)\rangle_I}_{\text{Null}}$$

$$= -i \underbrace{e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t}}_{\equiv V_I(t)} |\Psi(t)\rangle_I$$

$e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} = H_0$

$$= -i V_I(t) |\Psi(t)\rangle_I$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I &= V_I(t) |\Psi(t)\rangle_I \\ V_I(t) &= e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t} \end{aligned}}$$

Beispiel: $V(t) = V_0(t) x^4$
 $V(t) = E(t) \cdot x$
 z.B. $E(t) = E_0 \cos \Omega t$

Unitäre Äquivalenz von $|\Psi(t)\rangle$ und

$$|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\Psi(t)\rangle$$

1. Ordnung Störungstheorie

$$\frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I = -i V_I(t) |\Psi(t)\rangle_I \quad \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow |\Psi(t)\rangle_I = |\Psi(t=0)\rangle_I - i \int_0^t dt' V_I(t') |\Psi(t')\rangle_I$$

$$= e^{iH_0 t} |\Psi(t)\rangle \quad (t=0)$$

$$= |\Psi(t=0)\rangle_{\mathbb{I}} - i \int_0^t dt' V_{\mathbb{I}}(t') \{ |\Psi(t=0)\rangle - i \int_0^{t'} dt'' V_{\mathbb{I}}(t'') |\Psi(t'')\rangle \}$$

$\uparrow O(V^0)$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{O(V)}$ $\underbrace{\hspace{15em}}_{O(V^2)}$

Jetzt diese Reihe abbrechen:

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathbb{I}} = |\Psi(t=0)\rangle_{\mathbb{I}} - i \int_0^t dt' V_{\mathbb{I}}(t') |\Psi(t=0)\rangle_{\mathbb{I}} + O(V^2)$$

Jetzt Basis von H_0 benutzen:

$$H_0 |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle \quad \text{als gl\u00e4t betrachtet}$$

$$\hat{1} = \sum_n |n\rangle \langle n| \quad \text{Vollst\u00e4ndigkeit}$$

$$\begin{aligned} \langle n | \Psi(t) \rangle_{\mathbb{I}} &= \langle n | \Psi(t=0) \rangle_{\mathbb{I}} - i \int_0^t dt' \langle n | V_{\mathbb{I}}(t') \sum_{n'} |n'\rangle \langle n' | \Psi(t=0) \rangle \\ &= \langle n | \Psi(0) \rangle_{\mathbb{I}} - i \int_0^t dt' \sum_{n'} \langle n | V_{\mathbb{I}}(t') | n' \rangle \langle n' | \Psi(0) \rangle + O(V^2) \end{aligned}$$

Matrixgleichung der Form

$$\Psi_n = \Psi_n^0 + \sum_{n'} \mathcal{V}_{nn'}(t) \Psi_{n'}^0; \quad \mathcal{V}_{nn'}(t) = -i \int_0^t dt' \langle n | V_{\mathbb{I}}(t') | n' \rangle + O(V^2)$$

Zur Zeit $t=0$ sei $|\Psi(t=0)\rangle = |m\rangle$ ein
Eigenzustand von H_0

Damit

$$\begin{aligned} \langle n|\Psi(t)\rangle_I &= \langle n|n\rangle - i \int_0^t dt' \sum_n \langle n|V_I(t')|n'\rangle \langle n'|m\rangle + \mathcal{O}(V^2) \\ &= \delta_{nn} - i \int_0^t dt' \langle n|V_I(t')|m\rangle + \mathcal{O}(V^2) \end{aligned}$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t} |\Psi(t)\rangle_I \quad / \quad \langle n|$$

$$\langle n|\Psi(t)\rangle = \langle n|e^{-iH_0 t}|\Psi(t)\rangle_I = e^{i\varepsilon_n t} \langle n|\Psi(t)\rangle_I$$

Schrödinger-Bild WW Bild

$|\langle n|\Psi(t)\rangle|^2 = |\langle n|\Psi(t)\rangle_I|^2 =$ Wahrscheinlichkeit,
das System zur Zeit t im
Zustand $|n\rangle$ zu finden.

Übergangswahrscheinlichkeit von m nach $n \neq m$ ist
gegeben durch $|\langle n|\Psi(t)\rangle|^2 \stackrel{n \neq m}{=} \left| \int_0^t dt' \langle n|V_I(t')|m\rangle \right|^2$

in erster Ordnung, in V

Plötzliches Einschalten „sudden switching“

In 1. Ordnung $V(t) = V \theta(t), \quad \theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

$$|\langle n | \Psi(t) \rangle|^2 = P_{m \rightarrow n}(t) = \left| \int_0^t dt' \langle n | V_I(t') | m \rangle \right|^2$$

$$\text{zuerst } \langle n | V_I(t) | m \rangle = \langle n | e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} | m \rangle$$

$$= e^{i(\epsilon_n - \epsilon_m)t} \langle n | V | m \rangle$$

$$\Rightarrow P_{m \rightarrow n}(t) = \left| \int_0^t dt' \langle n | V | m \rangle e^{i(\epsilon_n - \epsilon_m)t'} \right|^2 =$$

$$= |\langle n | V | m \rangle|^2 \left| \frac{e^{i(\epsilon_n - \epsilon_m)t} - 1}{i(\epsilon_n - \epsilon_m)} \right|^2$$

$$= |\langle n | V | m \rangle|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{\epsilon_n - \epsilon_m}{2} t}{(\epsilon_n - \epsilon_m)^2} ; \quad \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

Zuerst $t \rightarrow \infty$

⌈ Theorem (Forster, Analysis III):

Für jede integrierbare, normierte Funktion $f(x)$

mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 1$ gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \delta(x)$$

Setzt mit $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 x/\epsilon}{(x/\epsilon)^2} = \delta(x);$$

$$\Delta E = \epsilon_n - \epsilon_m$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\Delta E \cdot t}{2}}{(\Delta E \cdot t/2)^2} = \delta(\Delta E)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} P_{m \rightarrow n}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} |\langle n|V|m \rangle|^2 \frac{2\pi t}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\epsilon_n - \epsilon_m}{2} t}{\left[\frac{(\epsilon_n - \epsilon_m)t}{2}\right]^2}$$

$$= 2\pi |\langle n|V|m \rangle|^2 \delta(\epsilon_n - \epsilon_m)$$

Definiere $\Gamma_{m \rightarrow n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} P_{m \rightarrow n}(t)$ Übergangsrate

$$= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n|V|m \rangle|^2 \delta(\epsilon_n - \epsilon_m)$$

Fermis goldene Regel

feronts-Übergangsrate $\Gamma_m \equiv \sum_{n \neq m} \Gamma_{m \rightarrow n} \Rightarrow$

$$\Gamma_m = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{n \neq m} |\langle n|V|m \rangle|^2 \delta(\epsilon_n - \epsilon_m)$$

Höhere Ordnungen

Zeitentwicklungsoperator $|N(t)\rangle = U(t, t_0)|N(t_0)\rangle$

Falls $H(t) = H \Rightarrow U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)}$

Erfüllt Bewegungsgl.: $i\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0)$

$$U(t_0, t_0) = 1$$

Jetzt $H(t) = H_0 + V(t)$

Jetzt WW-Bild: $\tilde{U}(t, t_0) = e^{iH_0 t} U(t, t_0) e^{-iH_0 t}$

$$\Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \tilde{U}(t, t_0) = \tilde{V}(t) \tilde{U}(t, t_0)$$

$$\tilde{V}(t) = e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t}$$

Jetzt iterieren:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt' \tilde{V}(t') \tilde{U}(t', t_0) \quad t' = t_n \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 \tilde{V}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \tilde{V}(t_1) \tilde{V}(t_2) + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \tilde{V}(t_1) \dots \tilde{V}(t_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1 + x(1 + x + x^2 + \dots) \\ &= 1 + xS \end{aligned}$$