

22.10.08

22.10.08

$$M \ddot{x} = \underline{F} + \sum_{\alpha=1}^r \lambda_{\alpha}(t) \nabla g_{\alpha} \quad K \text{ Gleichungen}$$

$$g_{\alpha}(x, t) = 0 \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{Lagrange'sche Multiplikatoren} \\ \alpha = 1, \dots, r \text{ Nebenbed.} \end{array}$$

Lagrange I  $K+r$  Gleichungen.

Elimination der Zwangskräfte  $\rightarrow$  Lagrange II

$$x_n \equiv x_n(q_1, \dots, q_f, t) \quad n = 1, \dots, K$$

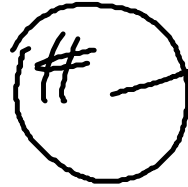
$f = K - r$  neue Koordinaten  $q_k$

$$f + r = K$$

$$K = d \cdot N$$

Beispiel:  $K = 3$

z.B.  $r=1$  NB  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



Winkel  $\theta, \varphi$ :



$f$ :  
Neue Bewegungsgleichungen  
gesucht:  
2 Stück

Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(\underline{x}(q_1, \dots, q_f), t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_k} g_\alpha = \nabla g_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} = 0$$

Jetzt mit  $M \ddot{\underline{x}} = \underline{F} + \sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \nabla g_\alpha$  multipliziert:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}$$

$$M \ddot{\underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} = \underline{F} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}$$

kinetische Energie  $T = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} M \dot{\underline{x}}$

$$\left( \begin{array}{c} m_1 \\ m_1 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_2 \\ m_2 \\ \dots \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ \vdots \end{array} \right)$$

Für ebene PKO  $T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \neq \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2)$

T hängt von  $q_k, \dot{q}_k$  ab

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \dot{\underline{x}} M \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{x} M \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \dot{x} M \frac{\partial x}{\partial q_k}$$

„Kürzen von Punkten“:

$$\dot{x}_n = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$  wäre in kartes. KO mit  $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$v = \dot{q}_k$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial v} = m v$$

→ Bilde Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \ddot{x} M \frac{\partial x}{\partial q_k} + \dot{x} M \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial v} = m \dot{v} = \dot{p}$$

$$(= F)$$

$$= \underbrace{\ddot{x} M \frac{\partial x}{\partial q_k}}_{F \frac{\partial x}{\partial q_k}} + \underbrace{\dot{x} M \frac{\partial x}{\partial q_k}}_{\partial T / \partial q_k}$$

(AUFGABE)

$$\left\| \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \underline{F} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} = \underline{Q}_k \right\|$$

$\underline{Q}_k$ : verallgemeinerte Kraft.

Für konservative Kräfte  $\underline{F} = -\underline{\nabla} U(\underline{x}, t)$

$$\Rightarrow \underline{Q}_k = \underline{F} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} = -\underline{\nabla} U \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k} \\ = -\frac{\partial}{\partial q_k} U(\underline{x}(q_1, \dots, q_f, t), t)$$

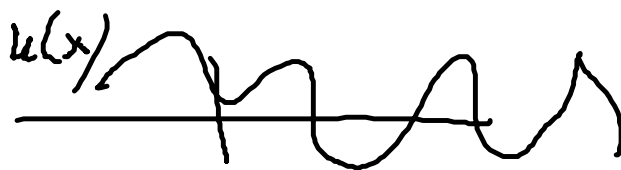
Def.: Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \equiv T - U$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, \dots, f}$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

Beispiele



1) Kartesische KO in 1d

$$L(x, \dot{x}) = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} m \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (= F(x))$$

2) Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

$$L(\quad) = \frac{1}{2} m \underline{v}^2$$

$$= \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right)$$

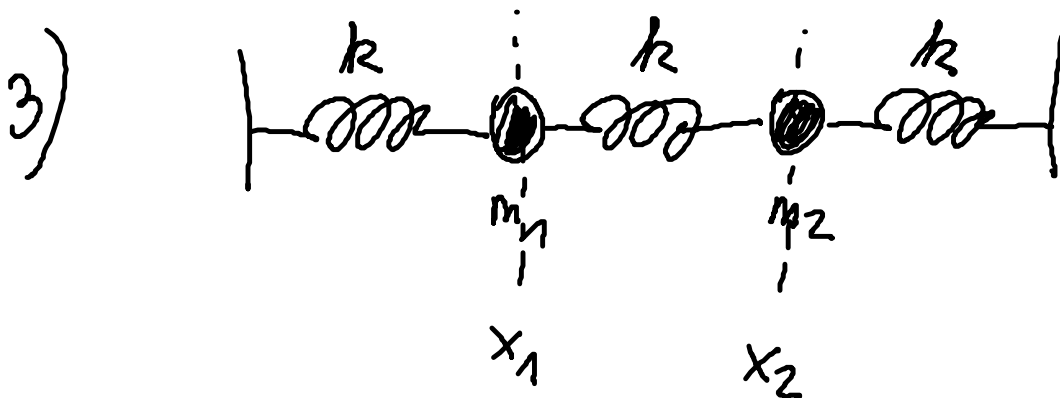
$q_1 = r$   
 $q_2 = \theta$   
 $q_3 = \varphi$

(kein Potential)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} m\dot{r} - m r \dot{\theta}^2 - m r \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 = 0$$

→ Bremsbeschleunigung



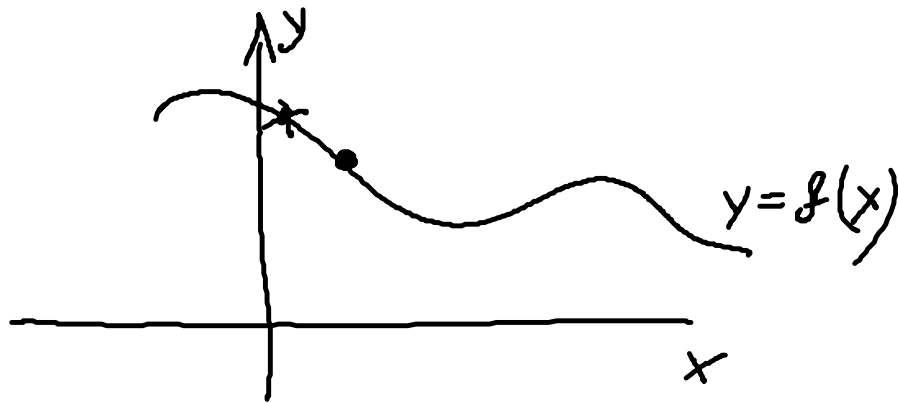
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

$$L = T - U \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + kx_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

4) Bewegung entlang einer Kurve  $y = f(x)$



Bogenlänge  $s$  als neue Koordinate

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$$

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (V=0) \quad \dot{y} = \dot{x} f'(x)$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 (1 + f'(x)^2)} dt$$

$$\stackrel{LII}{\Rightarrow} m \ddot{s}(t) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 (1 + f'(x)^2)}$$

$$\rightarrow \ddot{x} (1 + f'(x)^2) + \dot{x}^2 f'(x) f''(x) = 0$$

Entlang der Kurve wirkt die Kraft

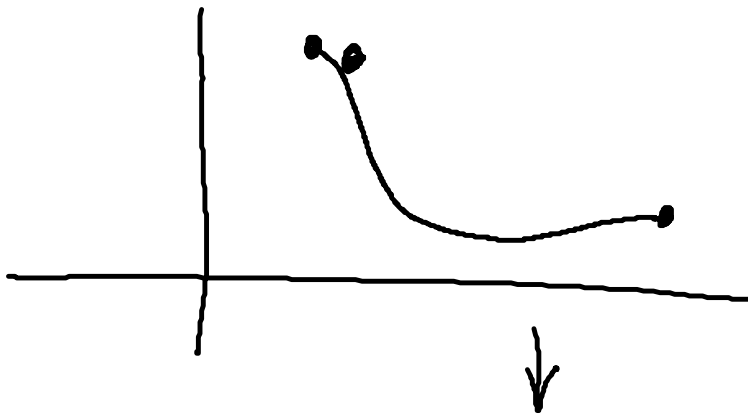
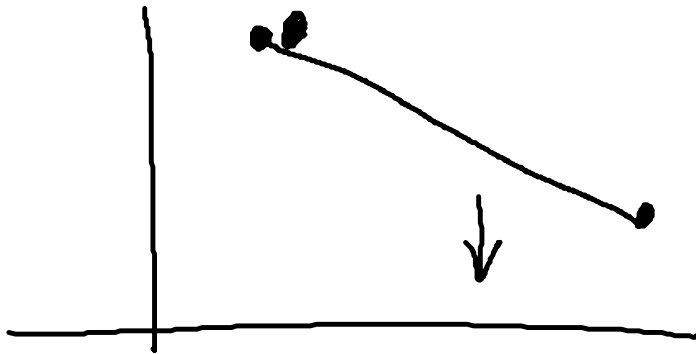
$$F(s) = -\frac{d}{ds} U(s)$$

Energiesatz  $\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + U(s)}_E \right) = 0,$

denn  $m \dot{s} \ddot{s} + \frac{\partial U}{\partial s} \dot{s} = \dot{s} \left( \underbrace{m \ddot{s}}_0 + \frac{\partial U}{\partial s} \right) = 0$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + U(s) \Rightarrow t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds'}{\sqrt{2(E - U(s'))/m}}$$

Beispiel:





## 2.3. Extremalprinzipien

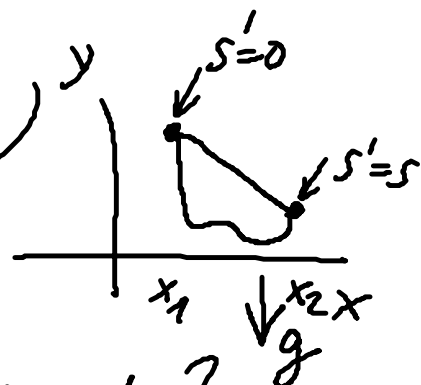
### 2.3.1. Das Brachistochronen-Problem

Bernoulli

1696

Massenpunkt bewegt sich von  $P_1 = (x_1, y_1)$  nach  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $u(x) = mg f(x)$

$$f(x) = y$$



Für welches  $f(x)$  wird  $t - t_0$  minimal?

$$t = \int_0^s \frac{ds'}{\sqrt{2(E - u(s'))/m}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\sqrt{2(E/m - g f(x))}}$$

$\stackrel{!}{=} \min$

$$t[f(x)] \stackrel{!}{=} \min$$

2.3.2. Einschub: Variationsableitungen  
(Funktionalableitungen).

vektorielle Funktion  $\underline{u}(\underline{x}) = (u_1(\underline{x}), \dots, u_m(\underline{x}))$

mit  $u_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Def:  $F[u] \equiv \int d^n \underline{x} F(\underline{x}, u_1(\underline{x}), \dots, u_m(\underline{x}), \nabla u_1, \dots, \nabla u_m)$

$\Omega$  feilt in  $\mathbb{R}^n$  mit  $F$  zweimal stetig diff.  
und  $u_i$  einmal "

wird als Funktional  $F: \underline{u} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Def: Das Argument  $\underline{u}(\underline{x})$  in  $F$  werde  
"ein wenig" variiert, d.h.  $\underline{u}(\underline{x}) \rightarrow \underline{u}(\underline{x}) + \varepsilon \underline{h}(\underline{x})$   
" mit  $\varepsilon > 0$  und  $\underline{h}(\underline{x}) = (h_1(\underline{x}), \dots, h_m(\underline{x}))$ .

Dann heißt

$$\delta F_{\underline{u}}[\underline{h}] \equiv \frac{d}{d\varepsilon} F[\underline{u} + \varepsilon \underline{h}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\underline{u} + \varepsilon \underline{h}] - F[\underline{u}]}{\varepsilon}$$

1. Variation (Funktionalableitung)  
von  $F$  im Punkt  $\underline{u}$  in Richtung  $\underline{h}$ .

<u>Funktion <math>f(x)</math></u>	<u>Funktional <math>F[u]</math></u>
Punkt $x$ ist Vektor in $\mathbb{R}^n$	Punkt $u$ ist eine Funktion
Richtungsabl. in Richtung $v$	1. Variation $\delta F_u[h]$
$v \nabla f(x)$	

Def: Die Funktion  $u(x)$  heißt stationärer Punkt von  $F[u]$ , falls

$$\delta F_u[h] = 0 \text{ für alle } h(x), \text{ die auf dem Rand des Gebiets } \Omega \text{ verschwinden.}$$

Satz: Ein stationärer Punkt  $u(x)$  des Funktionals  $F[u]$  genügt den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{1,k}} - \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0; \quad \mu_{i,k} \equiv \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial u_{m,k}} - \frac{\partial F}{\partial u_m} = 0$$

Beweis:  $u(x) = u_1(x)$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}[u_1 + \varepsilon h_1] \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} d^n x \mathcal{F}[\underline{x}, u_1 + \varepsilon h_1, \underline{\nabla} u_1 + \varepsilon \underline{\nabla} h_1] \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_{\Omega} d^n x \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_1} h_1 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{1,k}} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_k} \right) \right)$$

$$= \int_{\Omega} d^n x \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_1} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{1,k}} \right) h_1(x)$$

↑  
beliebige

$\rightarrow$   $( ) = 0$   
 Entsprechend für  $m$ -komponentiges  $\underline{u}$