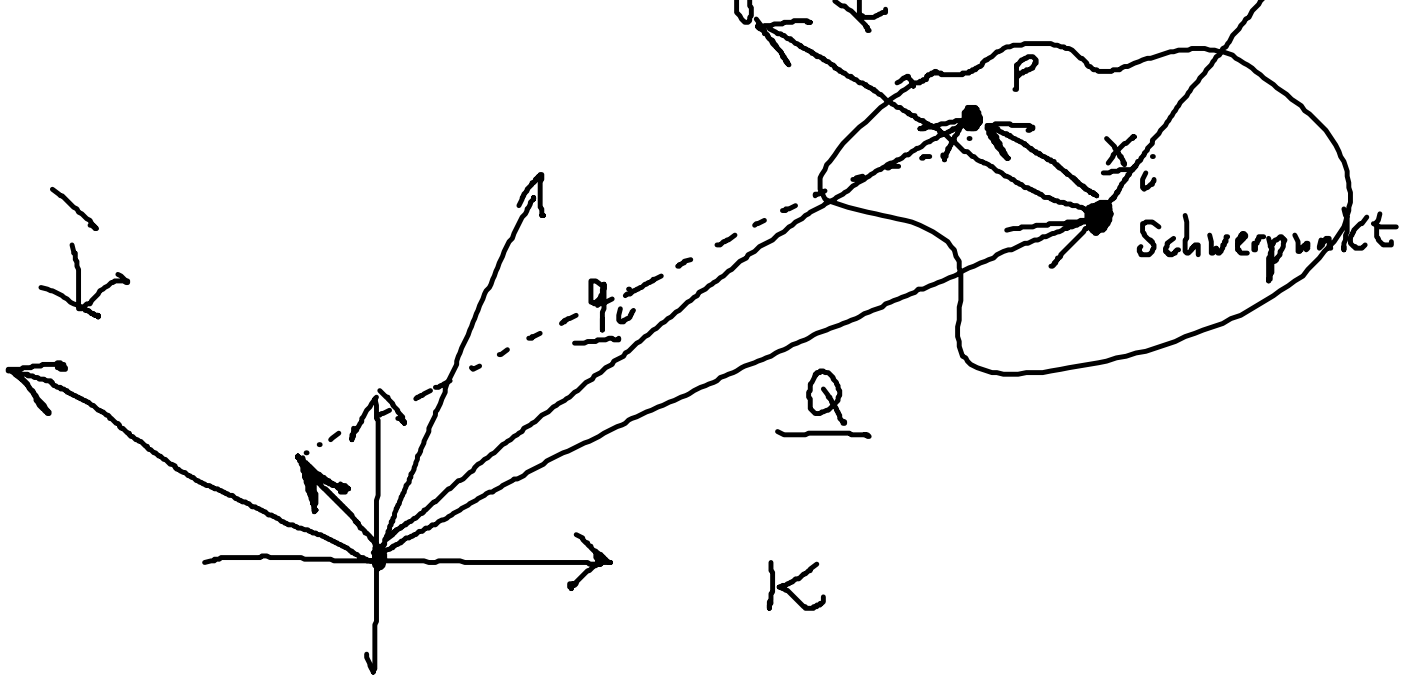


4.11.08

4.11.2008

N Massenpunkte m_i werden als starrer Körper bezeichnet, wenn ihr allgemeiner Bewegungszustand auf eine Schwerpunktsbewegung und eine Rotation beschreibbar ist. ↗



$$\underline{q}_i(t) = \underline{Q}(t) + \underline{x}_i(t) \quad \text{in } K \text{ (Inertial system)}$$

$$\underline{Q} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{q}_i$$

$$\underline{x}_i(t) = R(t) \underline{x}_i', \quad R(t) \in SO(3) \text{ Drehmatrix}$$

$\underline{x}_i' = \text{const}$
 Koordinaten von P im System K' ,
 d.h. im "körperfesten System"

Freiheitsgrade des starren Körpers :

- $\underline{Q}(t)$ Schwerpunktkoordinaten.
- $R(t)$ Drehmatrix.

geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\underline{\dot{q}}_i(t) &= \underline{\dot{Q}}(t) + \frac{d}{dt} R(t) \underline{x}_i' \\ &= \underline{\dot{Q}}(t) + \dot{R}(t) \underline{x}_i' \\ &= \underline{\dot{Q}}(t) + \dot{R}(t) R^{-1}(t) \underline{x}_i(t) \\ &= \underline{\dot{Q}}(t) + \underbrace{\dot{R}(t) R^{-1}(t)}_{\underline{\Omega}(t)} \underline{x}_i(t) \\ &= \underline{\dot{Q}}(t) + \underline{\omega} \times \underline{x}_i(t)\end{aligned}$$

$\underline{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit im System K

Kinetische Energie des starren Körpers:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\dot{Q}} + \underline{\omega} \times \underline{x}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \underline{\dot{Q}}^2 + 2 \underline{\dot{Q}} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{x}_i) + \right. \\ &\quad \left. + (\underline{\omega} \times \underline{x}_i)^2 \right\} \rightarrow = 0\end{aligned}$$

denn $\sum_{i=1}^N m_i \underline{x}_i = 0,$

$$\underline{Q} = \frac{1}{N} \sum_i m_i \underline{q}_i = \frac{1}{N} \sum_i m_i (\underline{Q} + \underline{x}_i)$$

$$= \frac{1}{N} \cancel{N \underline{Q}} + \frac{1}{N} \sum_i m_i \underline{x}_i = 0$$

$$\Rightarrow T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$$

$$T_{\text{trans}} \equiv \frac{1}{2} M \underline{\dot{Q}}^2$$

$$T_{\text{rot}} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega} \times \underline{x}_i)^2$$

Es gilt: T_{rot} ist vom Bezugssystem
unabhängig,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\underline{\omega}' \times \underline{x}'_i)^2$$

$$\underline{\omega}' = R \underline{\omega}, \quad R \text{ orthogonal}$$

Skalarprodukt: $\underline{y}^T \underline{y}$, hier

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \underbrace{(\underline{\Omega} \underline{x}_i)^T \underline{\Omega} \underline{x}_i}_{\text{Skalarprodukt}}$$

$\underline{y}^T \underline{y}$ ist invariant unter Rotationen:

$$\begin{aligned} y \rightarrow R y \Rightarrow \underline{y}'^T \underline{y}' &= (R y)^T R y \\ &= \underline{y}^T R^T R y \\ &= \underline{y}^T R^{-1} R y = \underline{y}^T \underline{y} \end{aligned}$$

Also T_{rot} in K' ausrechnen! Dort ist $\underline{x}'_i = \text{const}$.

Ausdruck vom Typ $(\underline{a} \times \underline{b})^2 = \underline{a}^2 \underline{b}^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$

$$\left(\underline{\omega} \times \underline{x} \right)^2 = \left(\sum_{\alpha=1}^3 \omega_{\alpha}^2 \right) \left(\sum_{\beta=1}^3 x_{\beta}^2 \right) - \left(\sum_{\alpha=1}^3 \omega_{\alpha} x_{\alpha} \right)^2$$

$$= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \omega_{\alpha} \left(\sum_{\gamma=1}^3 \delta_{\alpha\gamma} x_{\gamma}^2 - x_{\alpha} x_{\beta} \right) \omega_{\beta}$$

$$\Rightarrow T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \omega_{\alpha} \left(\delta_{\alpha\beta} x_{ij}^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta} \right) \omega_{\beta}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \left(\delta_{\alpha\beta} x_i^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta} \right)}_{\theta_{\alpha\beta}} \omega_{\beta}$$

$\theta_{\alpha\beta}$: 3x3-Matrix

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha} \theta_{\alpha\beta} \omega_{\beta}$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\theta} \underline{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ & \theta_{22} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

"Quadratische Form"
 (Bilinearform)

- Θ ist eine 3×3 -Matrix mit reellen Einträgen
- Invariant der Rotationsenergie

$$T_{\text{rots}} = \frac{1}{2} (\underline{\omega}')^T \underline{\Theta}' \underline{\omega}'$$

$$\left(\underline{\Theta}' \right)_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\delta_{\alpha\beta} (\underline{x}'_i)^2 - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right)$$

Trägheitsmoment in K^d

Folgt mit Massendichte

$$\rho(\underline{x}') = \sum_{i=1}^N m_i \delta^{(3)}(\underline{x}' - \underline{x}'_i)$$

(vgl. SKRIPT)

$$\Rightarrow \left[\Theta'_{\alpha\beta} = \int_{\text{Körper}} d^3 \underline{x}' \rho(\underline{x}') \left(\delta_{\alpha\beta} (\underline{x}')^2 - \underline{x}'_{\alpha} \underline{x}'_{\beta} \right) \right]$$

$$= \int d^3 \underline{x}' \sum_{i=1}^N m_i \delta^{(3)}(\underline{x}' - \underline{x}'_i) \left(\delta_{\alpha\beta} (\underline{x}')^2 - \underline{x}'_{\alpha} \underline{x}'_{\beta} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i \left(\delta_{\alpha\beta} (\underline{x}'_i)^2 - \underline{x}'_{i\alpha} \underline{x}'_{i\beta} \right)$$

Eigenschaften des Trägheitstensors

- 3×3 reelle, symmetr. Matrix.
- Diese Matrix kann diagonalisiert werden.

$$\Theta = O \Theta_D O^{-1}, \quad \Theta_D = \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \theta_2 & \\ & & \theta_3 \end{pmatrix}$$

„Hauptachsen Transformation“

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$: Hauptträgheitsmomente

Im durch die Eigenvektoren von Θ
aufgespannten Koordinatensystem (Hauptachsen System)

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\underbrace{x_i^2 - x_{i,1} x_{i,1}}_{x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2 - x_{i,1}^2} \right) > 0 \\ &= x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2 > 0 \end{aligned}$$

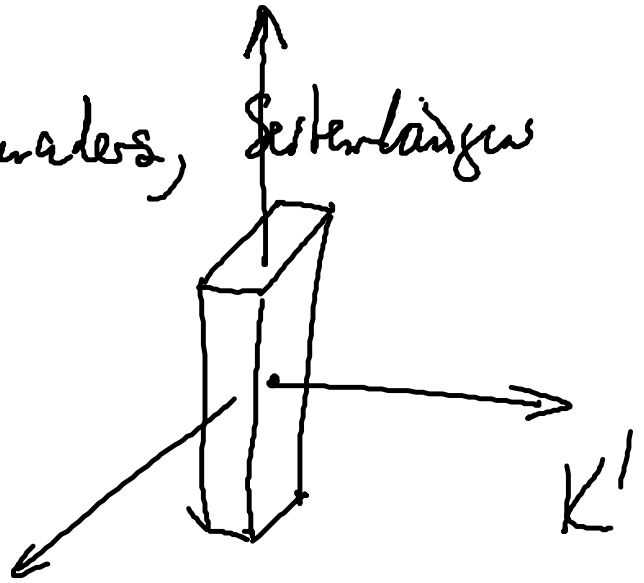
auch $\theta_2 > 0, \theta_3 > 0 \Rightarrow \Theta$ ist positiv definit.

Praktische Berechnung

Trägheitstensor eines Quaders, Seitenlängen

a, b, c

$\rho = \text{const}$



$$\Theta_{33} = \int d^3x \rho \left(\underline{x}^2 \delta_{3,3} - (\underline{x})_3 (\underline{x})_3 \right)$$

$$= \rho \int d^3x \underbrace{(\underline{x}^2 - z^2)}_{\text{Quader}} = \rho \int d^3x (x^2 + y^2)$$

$$= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (x^2 + y^2)$$

$$= \rho c \left(b \int_{-a/2}^{a/2} dx x^2 + a \int_{-b/2}^{b/2} dy y^2 \right)$$

$$= \rho c \left(b 2 \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} + a 2 \frac{1}{3} \frac{b^3}{8} \right)$$

$$= \rho abc \frac{1}{12} (a^2 + b^2) = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

$$\Theta_{22} = \frac{M}{12} (a^2 + c^2); \quad \Theta_{11} = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

$$\Theta_{d\beta} = \int d^3x \rho \left(\underbrace{x^2}_{\text{mit}} \delta_{d\beta} - x_d x_\beta \right) \quad d \neq \beta$$

$$= - \int d^3x \rho \begin{matrix} 0 \\ x_d x_\beta \end{matrix}$$

↖ a/2 b/2

z.B.

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} dx dy dz \quad x \cdot y = 0$$

Θ' ist diagonal, (in System K')

$$\Theta' = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

z.B. Rotation um die Diagonale

$$\underline{\hat{n}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \hat{j}$$

$$\underline{\omega}' = \omega_0 \underline{\hat{n}}, \quad \omega_0 \text{ Winkel frequenz}$$

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2} (\underline{\omega}')^T \underline{\Theta}' \underline{\omega}' =$$

$$= \frac{1}{2} \omega_0^2 \underline{\Theta}'_{\underline{n}}$$

$$\text{mit } \theta_{\underline{n}} \equiv \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left(a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2) \right) \frac{M}{12}$$

$$\equiv \frac{M}{6} \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

"Trägheitsmoment bezüglich der Achse \underline{n} ".

Das Drehimpuls

$$\underline{L} = \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i =$$

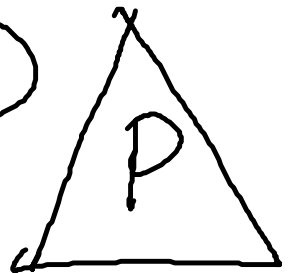
$$= \sum_{i=1}^N m_i (\underline{Q} + \underline{x}_i) \times (\dot{\underline{Q}} + \underline{\omega} \times \underline{x}_i)$$

$$= M \underline{Q} \times \dot{\underline{Q}} + \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{x}_i) m_i$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

$$\Rightarrow \underline{L} = \underline{L}_{\text{trans}} + \underline{L}_{\text{rots}}$$

$$\underline{L}_{\text{rots}} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\underline{\omega} (\underline{x}_i)^2 - \underline{x}_i (\underline{x}_i \cdot \underline{\omega}) \right)$$



Es gilt

$$\underline{L}_{\text{rots}} = \underline{\theta} \underline{\omega}$$

Drehimpuls
 \underline{L}

Trägheits tensor
Winkelgeschwindigkeit

Beweis: $(\underline{x}_i)^2 \omega_d - \underline{x}_{id} (\underline{x}_i \underline{\omega}) =$

$$= \sum_{\beta=1}^3 \omega_{\beta} \underbrace{((\underline{x}_i)^2 \delta_{d\beta} - x_{id} x_{i\beta})}_{\underline{x}_i \underline{\omega}} \bigg/ \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\Rightarrow \left(\underline{L}_{\text{rots}} \right)_d = \sum_{\beta} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\underline{x}_i^2 \delta_{d\beta} - x_{id} x_{i\beta})}_{\sum_{\beta} \theta_{d\beta} \omega_{\beta}} \omega_{\beta} \equiv \left(\underline{\theta} \underline{\omega} \right)_d$$

Hier $\underline{L}_{\text{rots}} = \underline{\theta} \underline{\omega}$ in K-System

$$\underline{L}_{\text{rots}} \equiv \underline{R} \underline{L}'_{\text{rots}} = \underline{\theta} \underline{\omega} = \underline{\theta} \underline{R} \underline{R}^{-1} \underline{\omega}$$

$$\underline{L}'_{\text{rots}} = \underbrace{\underline{R}^{-1} \underline{\theta} \underline{R}}_{\underline{\theta}' } \underbrace{\underline{R}^{-1} \underline{\omega}}_{\underline{\omega}' }$$

$$\boxed{\underline{L}'_{\text{rots}} = \underline{\theta}' \underline{\omega}'}$$

in K'
mit $\underline{\omega} = \underline{R} \underline{\omega}'$