

Aufgabe 21: (Blatt)

Legende Trafo-Aufgabe:

1 a) Bestimme die Lsgn Trafo von

$$f_1(x) = dx$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} m x^2$$

$$f_3(x) = e^{2x}$$

$$f_4(x) = \rho(x - \gamma)^2$$

$$f_5(x) = x^d / d$$

b) Extra: $L(x, \dot{x}) = d(x) \dot{x} - V(x)$

! solche Aufgaben. So reparieren, dass die Aufgabe „funktioniert“.

Hamilton-Jacobi-Theorie

Erzeugende $F_2(q, P, t) = S$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}; \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P};$$

$$K = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad S = S(q, P, t).$$

Idee: Trafo auf neue Hamiltonfkt $K=0$.

Hamilt. Gleichungen: $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \quad P_i \text{ zyklisch}$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad Q_i \text{ zyklisch}$$

$$\Rightarrow Q_i = d_i = \text{const}; \quad P_i = \beta_i = \text{const},$$

$$q_i = q_i(Q_i, P_i, t) = q_i(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}, t)$$

$$p_i = p_i(Q_i, P_i, t) = p_i(\{\alpha_i\}, \{\beta_i\}, t)$$


Hierzu zu lösen: $K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

Hamilton-Jacobi-Differentialgl.

- Das ist eine nichtlineare partielle DGL z.B. $q = (x, y)$
- Die Funktion $S(q, P, t)$ definiert eine "Fläche" über dem Konfigurationsraum der q ($P = \text{const}$, $t = \text{Parameter}$)

Konkretes Beispiel: harmonischer Oszillator $d=1$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2, \quad q \text{ Ortskoor.}$$


Darin $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ einsetzen

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2 = 0 \quad \text{H.Jac. Gl.}$$

Setzt additiver Separationsansatz

$$S(q, t) = f(t) + g(q)$$

$$\Rightarrow -\dot{f}(t) = \frac{1}{2m} (g'(q))^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 q^2 = \beta \equiv P = \text{Konstante}$$

diese Konstante hat dim. erg.

$$1) \quad f(t) = -P(t-t_0)$$

$$2) \quad g'(q) = \sqrt{2mP - (m\Omega q)^2}$$

$$\Rightarrow g(q) = \int dq \sqrt{2mP - (m\Omega q)^2}$$

Neue Ostko: $\underline{Q} = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} (f(t) + g(q))$

$$= -(t-t_0) + \frac{\partial}{\partial P} \int dq \sqrt{2mP - (m\Omega q)^2}$$

$$= -(t-t_0) + m \int \frac{dq}{\sqrt{2mP - (m\Omega q)^2}} =$$

$$= -(t-t_0) + \frac{1}{\Omega} \arcsin \sqrt{\frac{m\Omega^2}{2P}} q //$$

Q, P sind Konstanten

Auflösen: $\underline{q = q(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\Omega^2}} \sin \Omega (t-t_0+Q)}$

Das ist die bekannte Lösung
für den 1d Oszillator

P : Gesamtenergie

Q : Zeit nullpunkt

Die Funktion $S(q, P, t)$ wird als
 Hamiltonsche Wirkungsfunktion (Prinzipalfunktion)
 bezeichnet. $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$

$$\frac{d}{dt} S = \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial P}}_0 \dot{P} + \frac{\partial S}{\partial t} =$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q} = p \right) = p \dot{q} - H = L,$$

denn $H = p \dot{q} - L$ mit der Lagrange-
 Funktion L . Also gilt t_2

$$\frac{d}{dt} S = L \Rightarrow S = \int_{t_1}^{\cdot} dt L$$

Also ist S das Wirkungsfunktion, das wir
 bereits aus dem Hamiltonschen Prinzip
 kennen.

Folgt allgemein: falls die Zeit t nicht explizit
 in H auftritt, d.h. $H = H(q, P)$, macht
 man den Ansatz

$$S(q, P, t) = W(q, P) - Et,$$

in $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$ einsetzen

$$\Rightarrow -E + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q, P)\right) = 0$$

$$\Rightarrow H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

"verkürzte Hamilton-
 Jacobi-Gleichung"

$W(q, P)$: verkürzte Wirkungen.

Alternativ kann $\mathcal{H}(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E$ folgendermaßen
hergeleitet werden:

- konservatives System mit Energieerhaltung $\mathcal{H} = E$
- Suche nach Trajek., die nur die Ortskoordinaten Q_i zyklisch, d.h.

$$K = K(P_1, \dots, P_f) = K(\underline{P})$$

$$\Rightarrow \dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0$$

- Die zugehörige erzeugende Funktion $F_2(q, P) \equiv W(q, P)$
erfüllt $F = \frac{\partial W}{\partial q}, \frac{\partial W}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow K = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H$$

$$\boxed{K(\underline{P}) = H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(q, P)\right)}$$

verkürzte
Ham Jac.
D.M. fl.

neue Ortskoordinaten $\dot{Q}_i = \frac{\partial K(\underline{P})}{\partial P_i} \equiv \omega_i = \underline{\text{const}}$

$$\Rightarrow \underline{Q_i(t) = \omega_i t + \beta_i}$$

Beispiel: Teilchen in $d=2$, $V(q) = \text{const} = V$
 $\mathcal{H}(q, P) = \frac{P^2}{2m} + V$ $q = (x, y)$

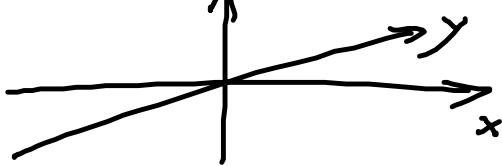
Ham.-Jac: $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E$
 $\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V = E$, Bemerkung: $\frac{\partial W}{\partial q} = \nabla_q W$

Ansatz: $W(q, P) = P \cdot q = P_x q_x + P_y q_y$

$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \nabla_q W = P$, einsetzen.

$\frac{1}{2m} P^2 = E - V$.

Die Funktion $z = W(q) = P \cdot q = P_x x + P_y y$.



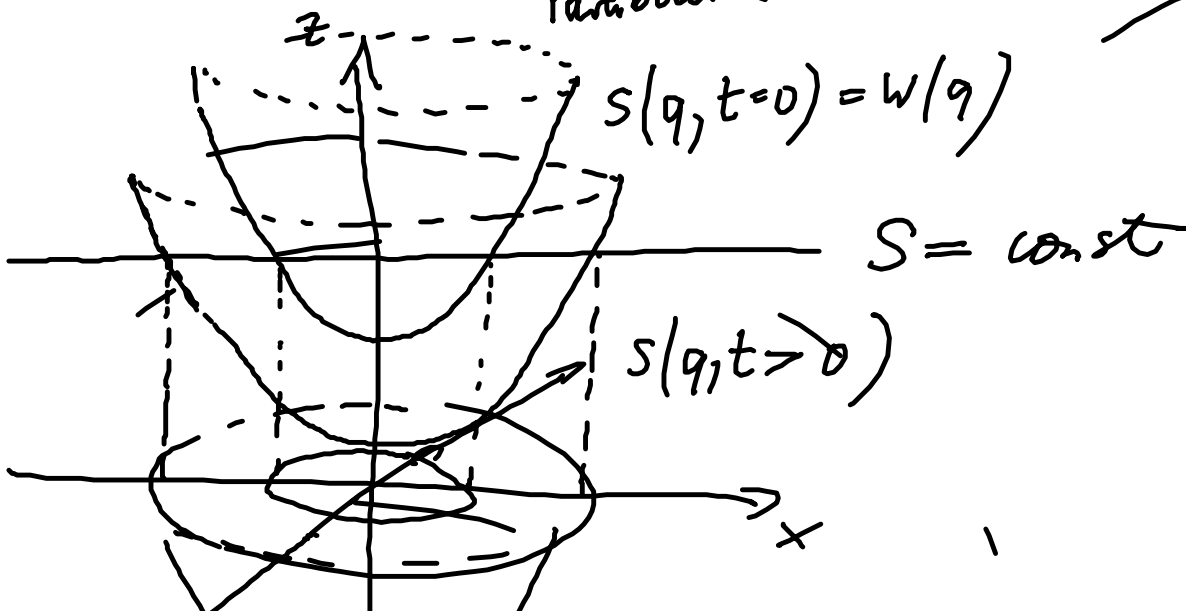
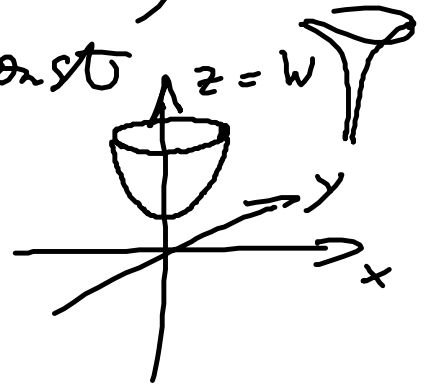
Fläche über der
x-y-Ebene

Geometrische Bedeutung der Wirkung; Wirkungswellen

Unser Def. was $S(q, P, t) = W(q, P) - E \cdot t$
(Zeit abspaziert).

- Betrachte alle Punkte q im Konfig. Raum, auf denen $S(q, t) = W(q) - E \cdot t = \text{const}$

- Beispiel: $W(q) = q^2$
Paraboloid



$t \gg 0$

Ausbreitungsgeschw. der „Wellenfronten“:

die „Phase“ $S = \text{const} \Rightarrow dS = 0$

$$\Rightarrow 0 = d(W - Et) = dW - E dt$$

$$0 = \underline{\nabla} W \cdot \dot{\underline{q}} - E; \quad \boxed{\underline{\nabla} W \cdot \dot{\underline{q}} = E}$$

geschwindigkeitsvektor soll \perp auf der Wellenfront, d.h. \parallel zum Gradienten

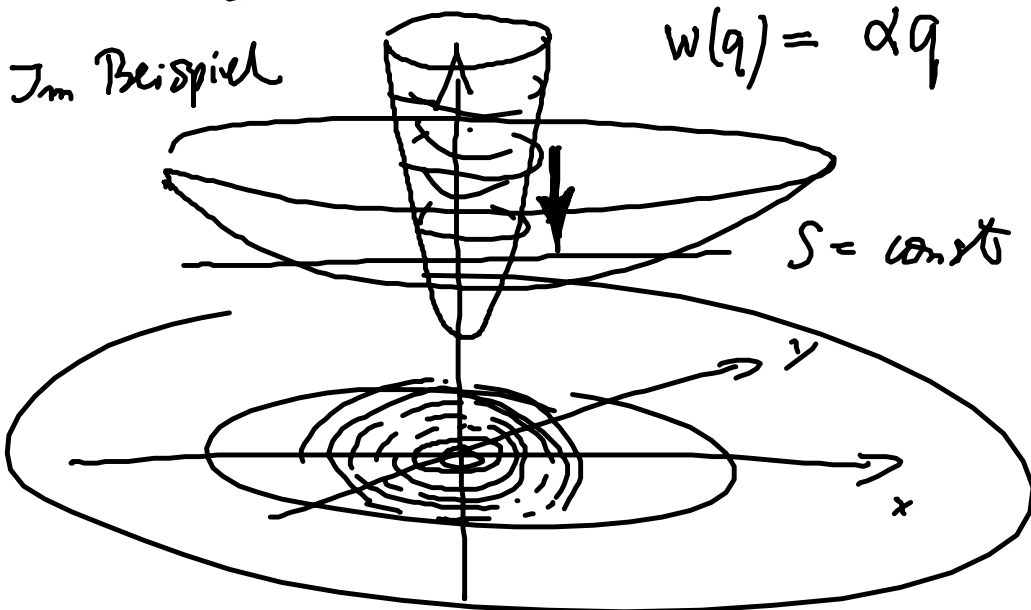
$$\underline{\nabla} W \Rightarrow \dot{\underline{q}} \parallel \underline{\nabla} W \Rightarrow$$

$$\underline{\nabla} W \cdot \dot{\underline{q}} = |\underline{\nabla} W| \cdot |\dot{\underline{q}}| \equiv |\underline{\nabla} W| \cdot \underbrace{c(\underline{q})}_{\text{Phasengeschw.}}$$

$$\Rightarrow \boxed{c(\underline{q}) = \frac{E}{|\underline{\nabla} W|}}$$

$$w(q) = \alpha q^2$$

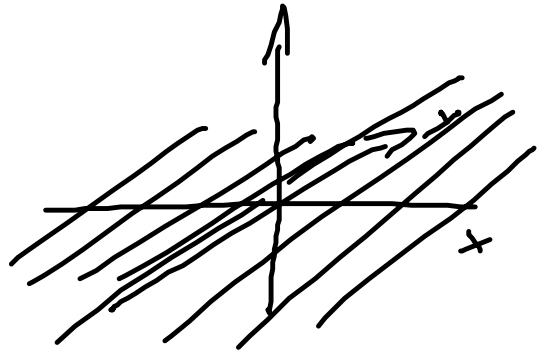
Im Beispiel



Beispiel: $d=2$, $\underline{q} = (x, y)$, Potential schwaches

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x|y),$$

$$V(x|y) = \begin{cases} V_L, & x \leq 0 \\ V_R, & x > 0 \end{cases}$$



Löse Ham.-Jac. $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = E$

mit Ansatz

$$W(q, p) = \begin{cases} P_L q, & x \leq 0 \\ P_R q, & x \geq 0 \end{cases}$$

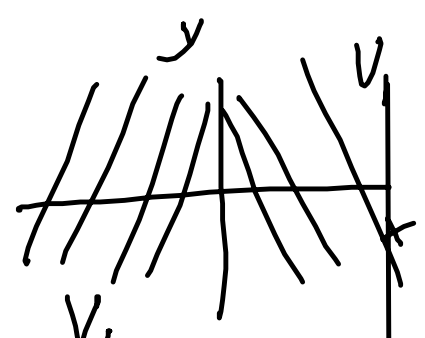
Einsetzen: $p = \frac{\partial W}{\partial q}$ in $H = E$

$$\Rightarrow \frac{p_L^2}{2m} = E - V_L \quad (x \leq 0)$$

$$\frac{p_R^2}{2m} = E - V_R$$

Es gilt: $p = \frac{\partial W}{\partial q} = \begin{cases} p_L & x \leq 0 \\ p_R & x \geq 0 \end{cases}$

p_L/R sind die wirklichen Impulse für $x \leq 0$ ($x \geq 0$)



• Bei $x=0$: Knick in der Bahn $q(t)$.

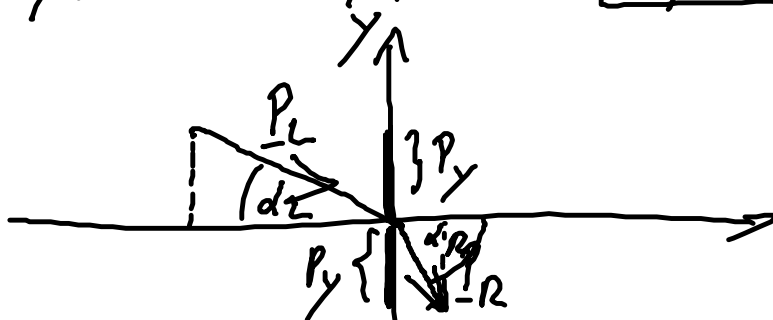
Forderung: $W(q, p)$ sei stetige Funktion

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{W(x - \epsilon, y, p)}_{x=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(x + \epsilon, y, p) \Big|_{x=0}$$

links

$$P_L \varphi_{x-\varepsilon} = P_R \varphi_{x+\varepsilon} \Big|_{x=0}$$

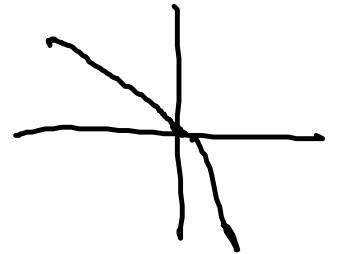
$$\Rightarrow P_{Ly} \cdot y = P_{Ry} \cdot y \Rightarrow \boxed{P_{Ly} = P_{Ry}}$$



$$\sin d_L = \frac{P_y}{|P_L|}$$

$$\sin d_R = \frac{P_y}{|P_R|}$$

$$\frac{\sin d_L}{\sin d_R} = \frac{|P_R|}{|P_L|} = \frac{\sqrt{E - V_R}}{\sqrt{E - V_L}}$$



Völlig analog zum

Brechungsgesetz von Snell
(Snellius)