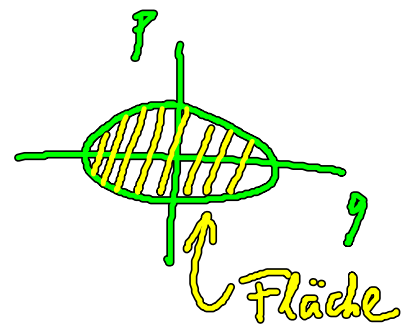
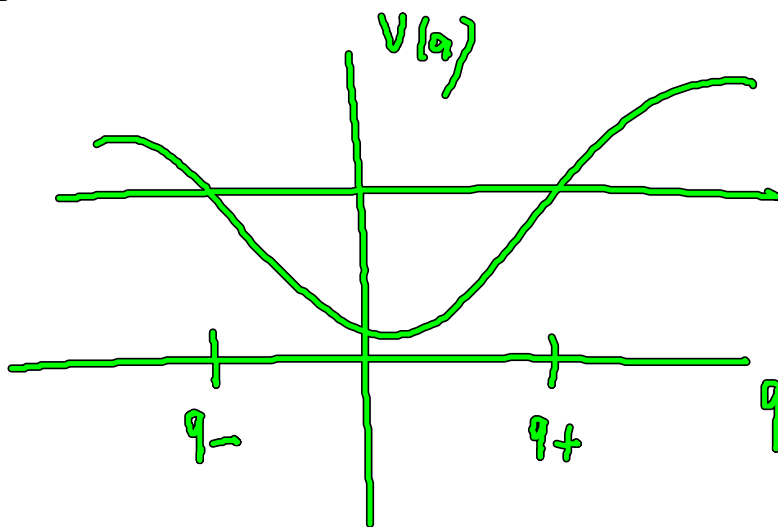


2.12.08

0

2.12.08



Periodendauer $\tau(E)$

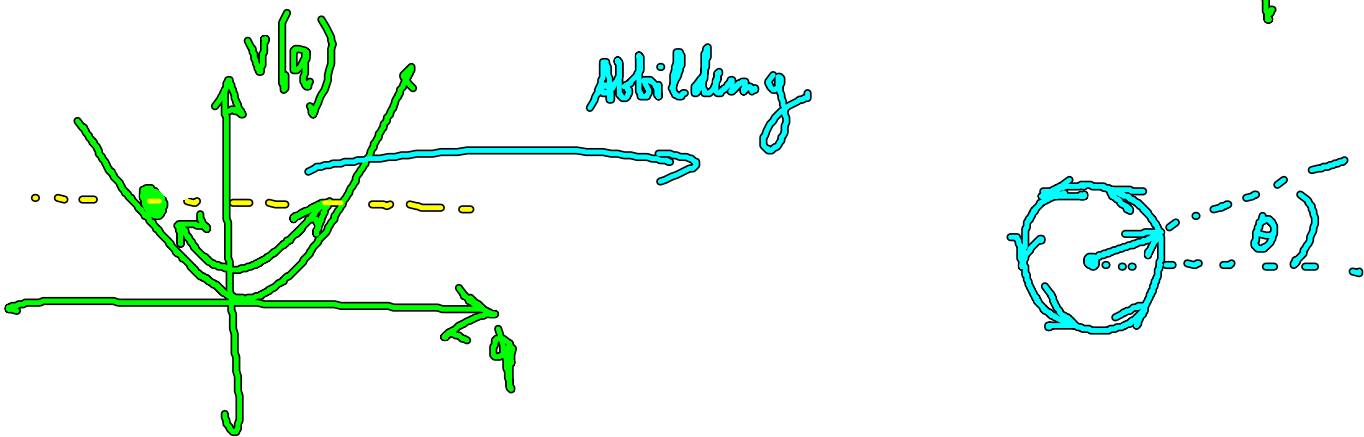
$$\tau(E) = \frac{2}{\hbar} \oint p(q, E) dq$$

Fläche: Wirkungsintegral

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, E) dq \quad \text{Wirkungsvariable}$$

Beispiel: 1d harmonischer Oszillator: Trajektorien im Phasenraum \Rightarrow Ellipsen

Idee: Einführung von „abstrakteren“ Winkelkoordinaten θ oder φ .



1. Schritt

Neue Koordinaten durch kanonische Transform.

$$q, p; H(q, p) = E \rightarrow Q, P, K(P)$$

so dass $P = J = \frac{1}{2\pi} \int p(q, E) dq$ Wirkungsvariable

Frage: Was ist das entsprechende
neue Q .

Es muss gelten $\{P, Q\} = 1$ für kan. Infos
(Die Poissonklammern bleiben bei
kanonischen Infos invariant).

Das neue Q ergibt sich aus

$$Q = \frac{\partial W(q, F)}{\partial F} = \varphi,$$

Q wird als Winkelvariable bezeichnet.

$$1 = \{P, Q\} = \{F, \varphi\},$$

d.h. Wirkungsvariable und Winkelvariable sind
kanonisch konjugiert

kan. konjugiertes Variables paar

1) p Impuls q Ort
dann $p \cdot q = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{J} \cdot \text{s}$

2) E Energie t Zeit
dann $E \cdot t = \text{J} \cdot \text{s}$

3) \mathcal{F} Wirkungsvariable φ Winkel
 L $\text{denn } \mathcal{F} \cdot \varphi = \mathcal{F} \cdot s \cdot \text{denn } \varphi = \mathcal{F} \cdot s$

Zurück zu $\varphi = \frac{\partial W(q, \mathcal{F})}{\partial \mathcal{F}}$ W verhierte Wirkung

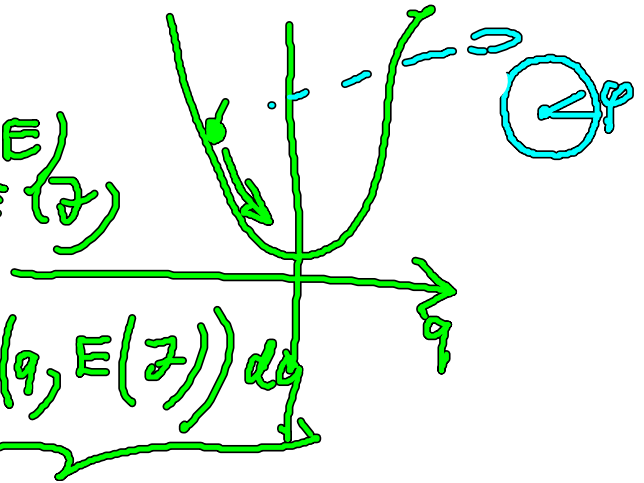
W erfüllt das verhierte Hamilton- \mathcal{F} - Jac. Gleichung \rightarrow

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \quad *$$

Berechnen Änderung $\Delta\varphi$ von φ beim Durchlaufen eines kompletten Zyklus der periodischen Bewegung, d.h. von $q_- \rightarrow q_+ \rightarrow q_-$

Bewegung, d.h. von $q_- \rightarrow q_+ \rightarrow q_-$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \oint \frac{\partial\varphi}{\partial q} dq = \\ &= \oint \frac{\partial}{\partial \mathcal{F}} \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial \mathcal{F}} \oint p(q, E(\mathcal{F})) dq \end{aligned}$$



$$= \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}} 2\pi \mathcal{J} = 2\pi$$

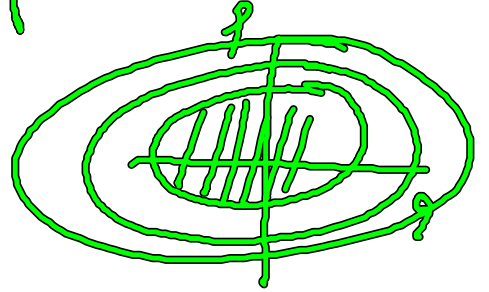
Bewegungsgleichung: $\dot{\varphi} = \frac{\partial K(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}} = \frac{\partial E(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}}$

$$\dot{\mathcal{J}} = -\frac{\partial K(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{P}} = 0$$

$$\mathcal{J} = \text{const}$$

$$\varphi(t) = \underbrace{\frac{\partial E(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}}}_{\omega(\mathcal{J})} \cdot t + \varphi_0$$

$$\omega(\mathcal{J}) = \frac{2\pi}{\tau}$$



$$\omega^{-1} = \frac{\partial \mathcal{J}(E)}{\partial E} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial E} \oint p(q, E) dq$$

ω Winkel

Winkel- und Wirkungsvariable bei $f \geq 1$ Freiheitsgraden

Beispiele: Überlagerter Schwingungen.

Betrachte separable Systeme mit Wirkungsfunktionen

$$S = \sum_{i=1}^f W_i(q_i, \underline{P}) - Et$$

$$\underline{P} = P_1, \dots, P_f$$

$$P_1 = E$$

Konstante der Bewegung

Definiere $J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i, \underline{P}) dq_i$; $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$

$$i = 1, \dots, f$$

Wirkungen als neue
Bewegungskonstanten.

Entsprechend kanonisch konjugierte Winkelvariablen θ_i

$$W = \sum_{k=1}^f w_k(q_k, \mathbb{I}(\underline{z})) \Rightarrow \theta_i = \frac{\partial W}{\partial z_i}, \quad i=1, \dots, f$$

neue Ham. Fkts $K = H = E(\underline{z})$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial E}{\partial z_i}, \quad z_i = \text{const}$$

$$\Rightarrow \theta_i = \omega_i t + \theta_{i0}; \quad \omega_i = \frac{\partial E}{\partial z_i}$$

$$\begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ & & \emptyset \end{matrix}$$

Alle Ortsvariablen q_i ausdrücken als

$$q_i = q_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_f; \underline{z})$$

sind periodisch, d.h. es gilt

$$* \quad q_i(\theta_1, \dots, \theta_f, \underline{z}) = q_i(\theta_1 + 2\pi n_1, \dots, \theta_f + 2\pi n_f, \underline{z}).$$

$n_i \in \mathbb{N}$

(Beweis im REBHAN).

* kann in Fourier-Reihe entwickelt werden.

$$q_i(\underline{\theta}, \underline{z}) = \sum_{n_1, \dots, n_f = -\infty}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_f}^{(i)} e^{i(n_1 \theta_1 + \dots + n_f \theta_f)}$$

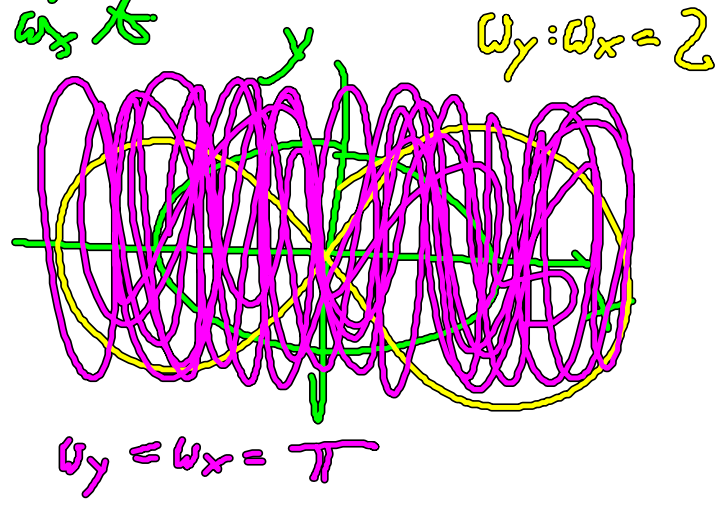
$$q_i(t) = \sum_{n_1, \dots, n_f = -\infty}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_f}^{(i)} e^{i(n_1 [\omega_1 t + \theta_{10}] + \dots + n_f [\omega_f t + \theta_{f0}])}$$

Das ist die Zeitentwicklung
der alten Ortskoordinaten $q_i(t)$

Satz: Falls die Winkelfrequenzen ω_i
kommensurabel sind, d.h. zueinander
rationaler Zahlenverhältnisse stehen, so sind die
 $q_i(t)$ periodische Funktionen in der Zeit

Beispiel: $y(t) = y_0 \sin \omega_y t$
 $x(t) = x_0 \sin \omega_x t$

Lissajous-Figuren



Kepler-Problem und die „Ältere Quantenmechanik“.

Zentralfeld in $d=3$, d.h. Potential
 $V(r)$.

Drehimpulserhaltung: Bewegung läuft in einer Ebene ab

Polar koordinaten (r, φ) Ortskoordinaten

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2} + V(r) \quad \text{Hamiltonfkt}$$

p_r, p_φ zu r, φ kanonisch konj. Impulse

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

Hamilton-Jacobi für reduzierte Wirkung W ^{Lagrange'sche}

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \varphi}; \quad W = W(r, \varphi)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 = E - V(r)$$

$$W(r, \varphi) = R(r) + \Phi(\varphi) \quad \text{Separations-Ansatz}$$

$$\left[R'(r) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\Phi'(\varphi) \right]^2 = 2m(E - V(r))$$

$$L_0^2 = \left[\Phi'(\varphi) \right]^2 = r^2 \left(2m(E - V(r)) - \left[R'(r) \right]^2 \right)$$

$$L_0 = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \phi'(q) = L_0 \Rightarrow \Phi(q) = L_0 q$$

$$R(r) = \pm \int_{r_0}^r \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{L_0^2}{r'^2}} dr'$$

$$W = \Phi + R$$

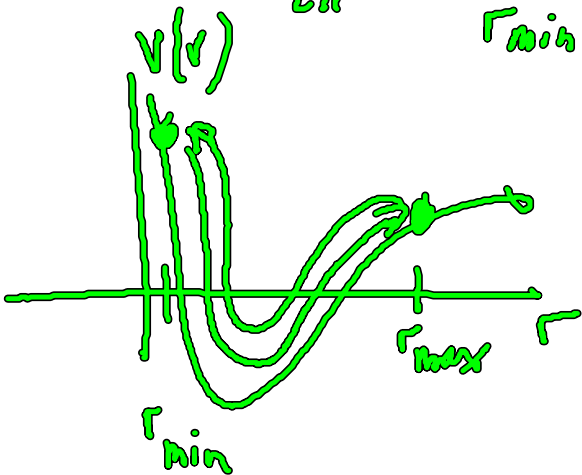
Wirkungsvariablen:

$$\mathcal{F}_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial \phi} d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} L_0 \cdot 2\pi = L_0$$

$$\mathcal{F}_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \frac{1}{2\pi} \oint R'(r) dr$$

$$= \frac{1}{2\pi} 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L_0^2}{r^2}}$$



Winkelvariablen, die zu ∂_ϕ und ∂_r gehören.

$$\theta_r = \frac{\partial W}{\partial \partial_r} = \frac{\partial R}{\partial \partial_r} = \frac{\partial}{\partial \partial_r} \int_{r_0}^r \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\partial_\phi^2}{r^2}} dr$$

$$\left[W = R + \Phi \right]$$

L ||
 $\partial_\phi \partial_\phi$

$$E = E(\partial_r, \partial_\phi)$$

$$= \int_{r_0}^r dr' \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial \partial_r} \right) = \omega_r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\partial_\phi^2}{r^2}}} =$$

$$= \omega_r \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\partial_\phi^2}{r^2}}}$$

(t - t₀)

d.h. $t - t_0 = \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\partial_\phi^2}{r^2}}}$

Das hatten wir bereits aus dem Energiesatz erhalten

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(r)) - \frac{L_0^2}{m^2 r^2}}$$

für den Fallstrahl

Winkelvariable $\theta_\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} =$

$\Gamma \Phi = \partial_\varphi \cdot \varphi$

$= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi(\varphi) + R(r)) =$

$= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\partial_\varphi \varphi + \int_{r_0}^r dr' \sqrt{2m [E - V(r')] - \frac{\partial_\varphi^2}{r'^2}} \right)$

$= \varphi + \int_{r_0}^r dr' \frac{n \frac{\partial E}{\partial \partial \varphi} - \partial_\varphi \frac{1}{r'^2}}{\sqrt{2m (E - V(r')) - \frac{\partial_\varphi^2}{r'^2}}} =$

$= \cancel{\varphi} + \omega_\varphi \int_{r_0}^r \frac{m}{\sqrt{\dots}} dr' - \cancel{\varphi}$

dens $\varphi = \int_{r_0}^r \frac{L_0/r'^2}{\sqrt{\dots}} dr'$

(siehe Kapitel 1)

$$\left. \begin{aligned} \theta_\varphi(t) &= \omega_\varphi (t - t_0) \\ \theta_r(t) &= \omega_r (t - t_0) \end{aligned} \right\} \text{zwei Winkel-} \\ \text{variablen}$$

$$\omega_\varphi, \omega_r = \text{konst}$$

