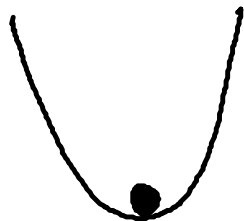


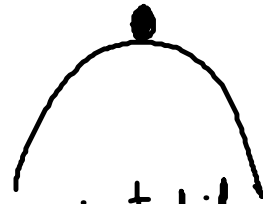
20.1.09

20.1.09

$v(x)$



stabil



instabil

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -v'(x) \\ p &= F(x) \end{aligned}$$

$\alpha - x$
linear

↙ Vorzeichen

$\alpha + x$
linear

↘

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$$

autonomes DS

Def: Ein Punkt \underline{x}^* eines DS heißt Fixpunkt, wenn

$$\underline{F}(\underline{x}^*) = 0$$

Beispiele: $\dot{p} = -v'(x)$ $f=1$ Freiheitsgrad
 $\dot{x} = p$ 2-dimens. DS.

Fixp. aus $0 = -v'(x^*)$
 $0 = p^*$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

Vektorfeld $\underline{F}(\underline{x})$ um den FP (Fixpunkt)
Taylor-entwickeln,

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underbrace{\underline{F}(\underline{x}^*)}_0 + \mathbb{D}F(\underline{x}^*) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^*) + \dots$$

Jacobi-Matrix $(\mathbb{D}F(\underline{x}^*))_{kl} = \left. \frac{\partial F_k}{\partial x_l} \right|_{\underline{x}^*}$

Beispiel : $\dot{x} = F(x)$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + \sin y \\ 1 + e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

$$DF(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

Wir brauchen das EW und E Vektoren der

Jacobi-Matrix :

Def. Die EW λ_i der Jacobi-Matrix $DF(\underline{x}^*)$ heißen charakteristische Exponenten des Fixpunktes \underline{x}^* . Falls für alle $i = 1, \dots, n$ $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$, heißt der Fixpunkt hyperbolisch.

Satz Ein hyperbolischer FP ist stabil,

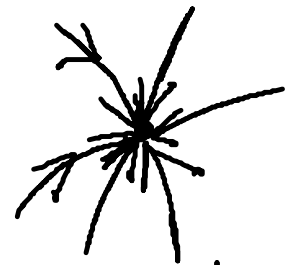
wenn alle charakteristischen Exponenten negativen Realteil haben und instabil, falls mindestens einer positiven Realteil hat.

Zweidimensionales Dynamisches System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) \quad \text{mit} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\underline{x}) \\ F_2(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

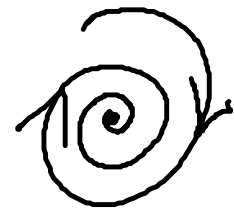
Die Jacobi-Matrix ist zweidimensional, hat zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 .

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: stabiler Knoten



läuft in der FP hinein

$\lambda_1 = \lambda_2^*, \operatorname{Re} \lambda_i < 0$, stabiler Strudel



Beispiel: gedämpfter harm. Osz.
in $d=1$, $\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

als DS $\underline{y}' = A \underline{y}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} x \\ p/m \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -1/\tau \end{pmatrix}$

EW der Jacobi-Matrix $DF = A$ hier
wegen der Linearität des Systems.

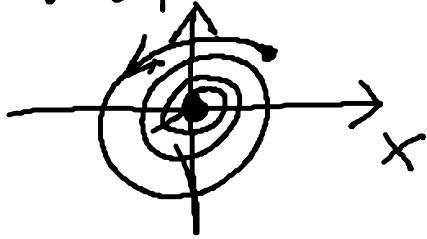
Der Fixpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte von A sind; $\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$

Schwingfall $\omega_0 > \frac{1}{2\tau}$, dann

$$\text{ist } \lambda_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$$

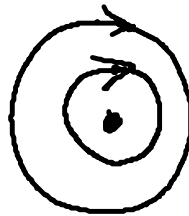
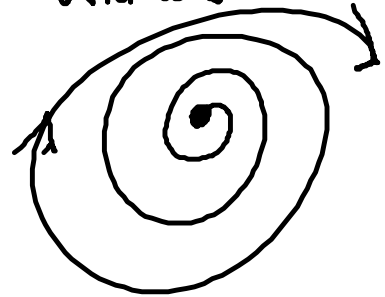
Deshalb ist der FP $(0,0)$ ein stabiler Strudel,
die Bewegung im Phasenraum (x, p) ist



$$\lambda_1 = \lambda_2^*, \operatorname{Re} \lambda_i > 0$$

instabiler Strudel

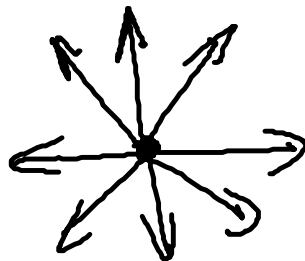
$$\lambda_1 = \lambda_2^*, \operatorname{Re} \lambda_i = 0$$



Winkel

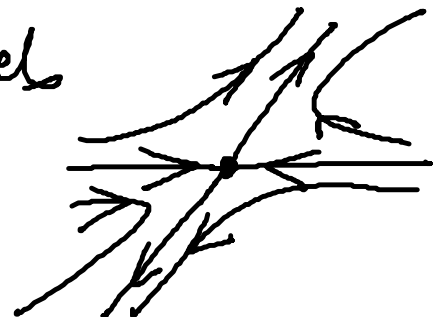
$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0,$$

instabiler Knoten



$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

Sattels



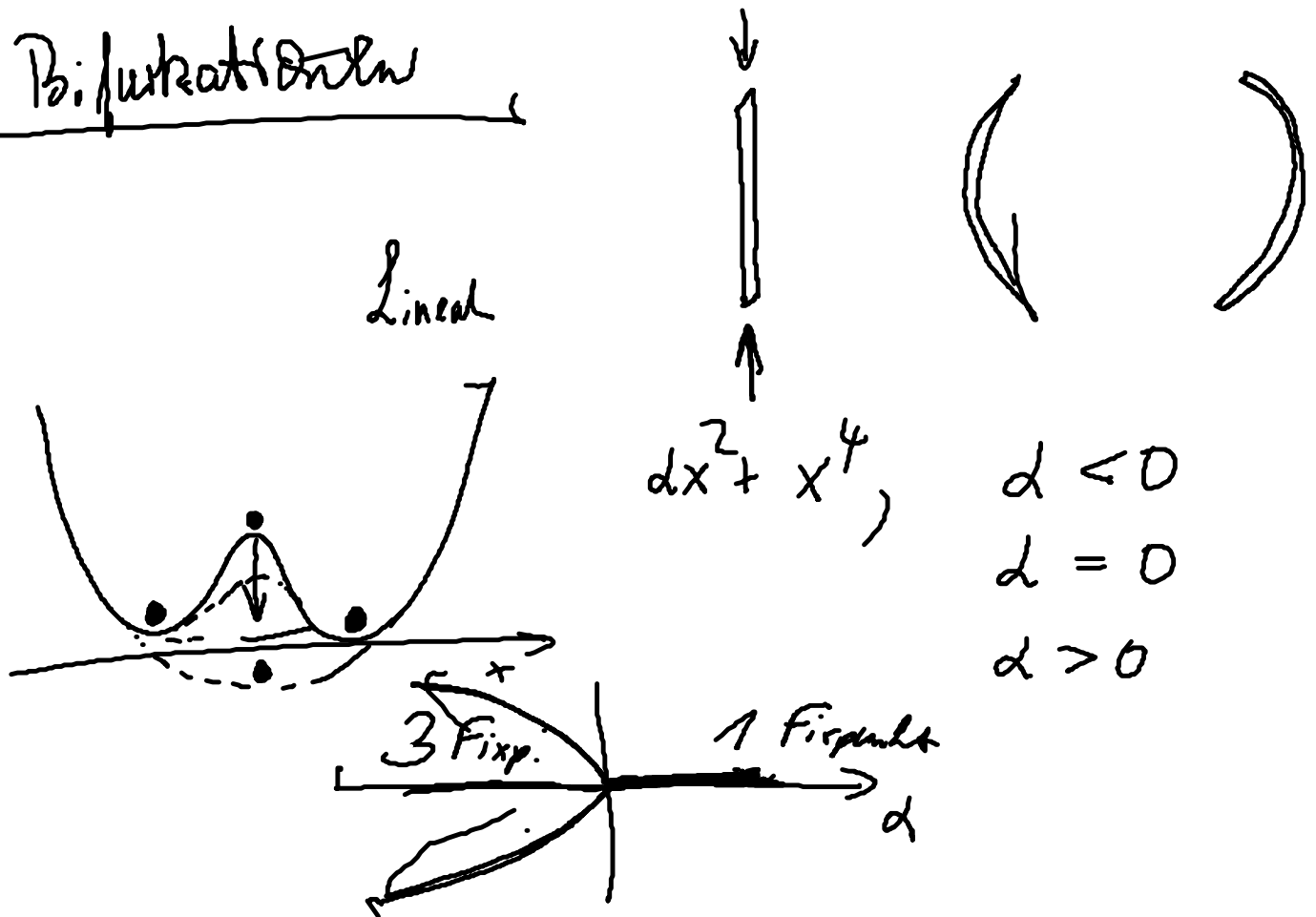
Satz: Konservatives DS haben
keine stabilen Fixpunkte.

Denn: $\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}^*) = 0$,

$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}^*) = \operatorname{Tr} DE(\underline{x}^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Falls $\operatorname{div} F = 0$, können nicht alle λ_i
negativen Realteil haben.

Bifurkationsdiagramm



1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = F(x) = r + x^2, \quad r \in \mathbb{R}$$

Parameter

$$\text{FP: } \dot{x} = 0 = r + x^2$$

$$x^2 = -r$$

$r < 0$: zwei FP $x_{\pm}^* = \pm \sqrt{-r}$

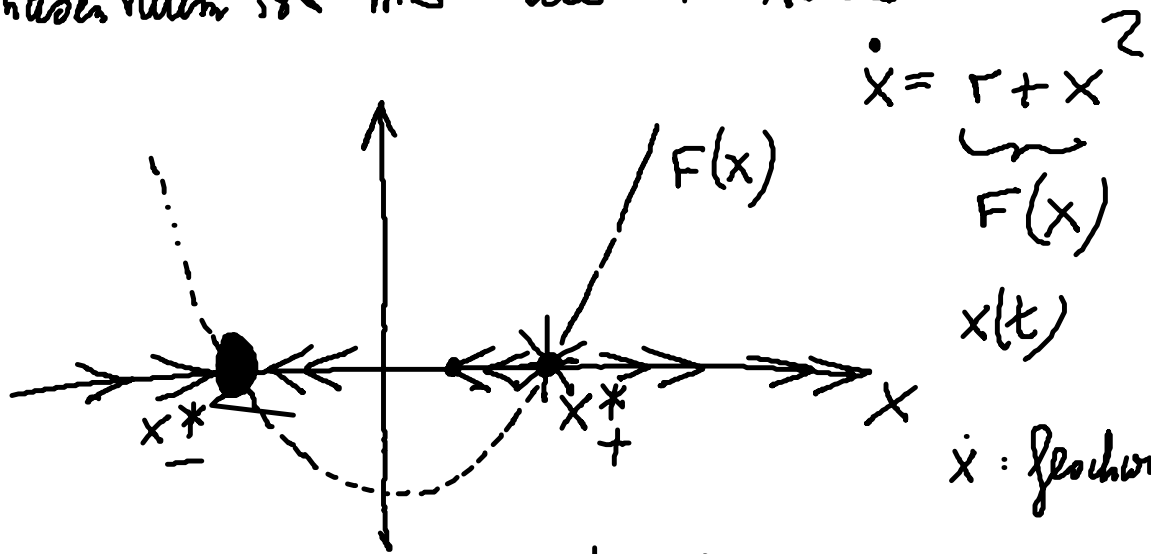
$$x_{-}^* = -\sqrt{-r}; \quad F'(x_{-}^*) = -2\sqrt{-r} < 0, \text{ stabil}$$

$$x_{+}^* = +\sqrt{-r}; \quad F'(x_{+}^*) = 2\sqrt{-r} > 0, \text{ instabil}$$

$$r > 0: \quad \text{kein FP}$$

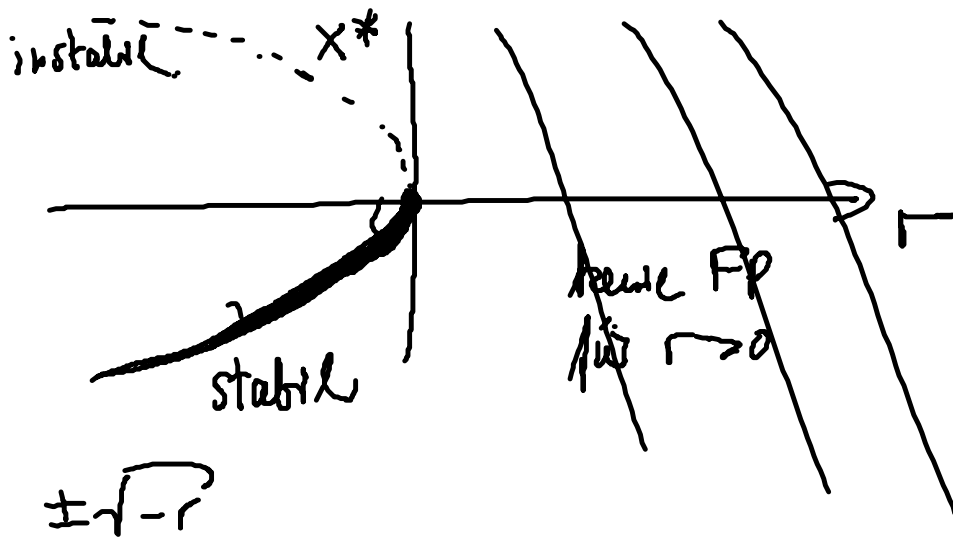
$$r = 0: \quad \text{FP } x^* = 0$$

Der Phasenraum ist hier die x -Achse



\dot{x} : Geschwindigkeit

Der Fluss läuft auf den stabilen FP x_-^* zu,
 und von instabilen FP x_+^* weg.



Zweidimensionales Fall:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}, \quad \mu \in \mathbb{R} \text{ reeller Kontrollparameter}$$

$$\text{FP: } \begin{aligned} 0 &= \mu - x^2 \Rightarrow x^* = \pm \sqrt{\mu} \quad (\mu > 0) \\ 0 &= -y \Rightarrow y^* = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{x}_{-}^* = (-\sqrt{\mu}, 0)$$

$$\underline{x}_{+}^* = (\sqrt{\mu}, 0) \quad \text{für } \mu > 0$$

Stabilität folgt aus der Jacobi-Matrix

$$DF = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_{1,2} = \begin{matrix} -2x \\ -1 \end{matrix}$$

$$\underline{x}_{-}^* : \quad \lambda_{1,2} = \begin{matrix} 2\sqrt{\mu} \\ -1 \end{matrix} \quad \text{Sattel}$$

$$\underline{x}_{+}^* : \quad \lambda_{1,2} = \begin{matrix} -2\sqrt{\mu} \\ -1 \end{matrix} \quad \text{stabiler Knoten}$$

Betrachte Bifurkationsdiagramm der Funktion von μ

Transkritische Bifurkation

$$\dot{x} = \gamma x - x^2 \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

$$= x(\Gamma - x)$$

Zwei FP:

$$x_0^* = 0$$

$$x^* = \Gamma$$

