

21.1.09

21.1.09

Laser:

$N(t)$

angeregte Atome

$n(t)$

Photonen in  
einer Kavität

$$\frac{d}{dt} n(t) = G n(t) N(t) - k n(t)$$

$$\frac{d}{dt} N(t) = - G n(t) N(t) - f N(t) + p$$

$p$  Pumprate

$k > 0$  Verlust-Koeffizient (Rate)

$G > 0$  „gain-Koeffizient“

$f > 0$  spontane Emission

• Diese Gleichungen beschreiben (phänomenologisch) einen Laser.

• Nichtlineares DS,  $d=2$  Dim.  
Nichtlineare Terme  $nN$

Approximation: Annahme, dass  $N(t)$  sehr viel schneller relaxiert als  $n(t)$ , damit

$$d/dt N \approx 0 \Rightarrow 0 = - G n N - f N + p$$

$$\Rightarrow N = \frac{p}{G n + f}, \text{ einsetzen in gl. für } n,$$

$$\parallel \frac{d}{dt} n(t) = \frac{G n(t) p}{G n(t) + f} - k n(t) \equiv F(n(t))$$

Diese f. hat Fixpunkte

$$0 = n = n \left( \underbrace{\frac{Gp}{Gn+f} - k}_{=0} \right) \Rightarrow \underline{\underline{n_0^* = 0}}$$

$$\frac{Gp}{k} = Gn + f \Rightarrow \underline{\underline{\frac{Gp}{Gn+f} = k}}$$

$$\underline{\underline{n_p^* = \frac{p}{k} - \frac{f}{G}}}$$

wird negativ falls  
 $p < p_c \equiv \frac{kf}{G}$ ,  
dann unphysikalisch.

Stabilität der FP

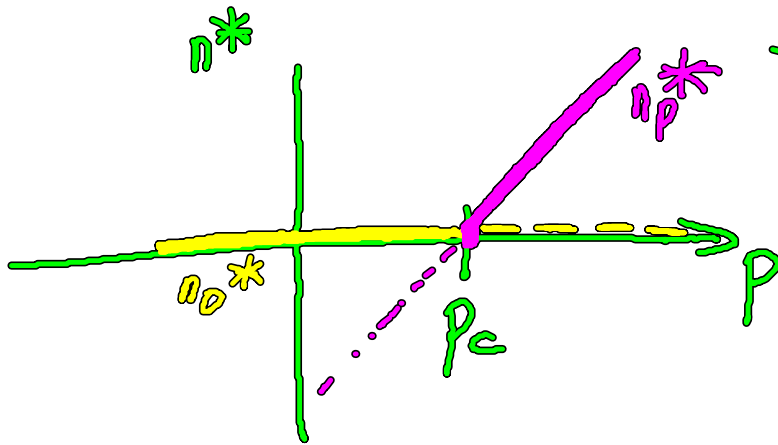
1. Ableitung  $F'(n) = \underbrace{\frac{Gp}{Gn+f}}_{\dots} - \frac{G^2 n p}{(Gn+f)^2} - k$

$$F'(n_0^*) = \frac{Gp}{f} - k$$

$$F'(n_p^*) = - \frac{G^2 p n_p^*}{(Gn_p^* + f)^2}$$

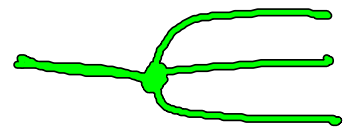
Für  $p < p_c = \frac{kf}{G}$  wird  $F'(n_0^*) < 0 \rightarrow n_0^*$  stabil,  
d.h. für  $p < p_c$  ist  $n_0^* = 0$  stabil

Für  $p > p_c$  wird  $F'(n_0^*) > 0$  und  $F'(n_p^*) < 0$   
 d.h. für  $p > p_c$  ist  $n_p^* = \frac{p}{h} = \frac{1}{6} > 0$  stabil



Hier liegt bei  $p = p_c$  eine  
 transkritische Bifurkation vor.

### 8.4.3. Hungabel - Bifurkation

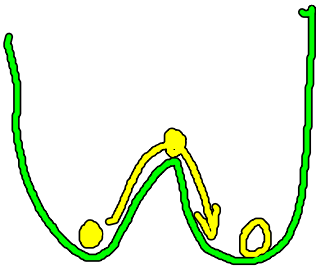


1) Supercritische Hungabel - Bifurkation.

Beispiel: Teilchen der Masse  $m=1$  in  $d=1$  Dim.,  
 im Potential

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\gamma x^2,$$

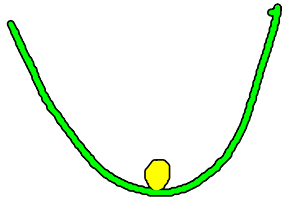
$\gamma \in \mathbb{R}$  Kontrollparameter



$\gamma > 0$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -v'(x) = \gamma x - x^3 \end{cases}$$



$\gamma \leq 0$

FP  $(x^*, 0)$  im Phasenraum der  $(x, p)$

$$\gamma x^* - (x^*)^3 = 0 \Rightarrow$$

$x_0^* = 0$  einzige stabile FP für  $\gamma < 0$

$$x_0^* = 0$$

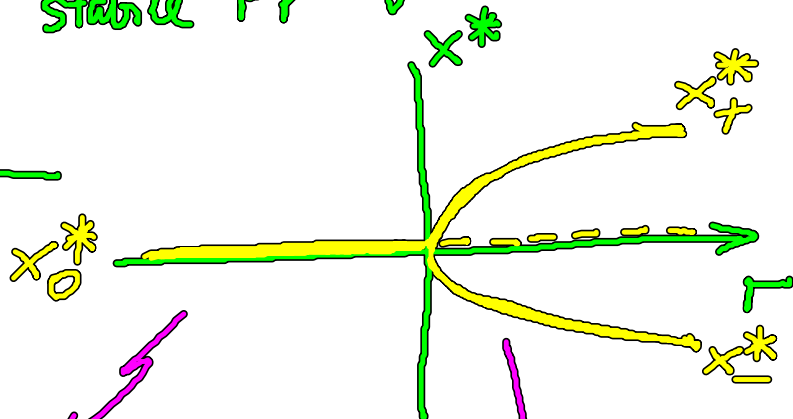
instabile FP

$$x_{\pm}^* = \pm\sqrt{\gamma}$$

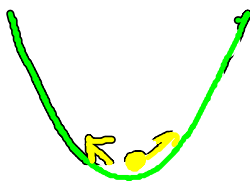
stabile FP

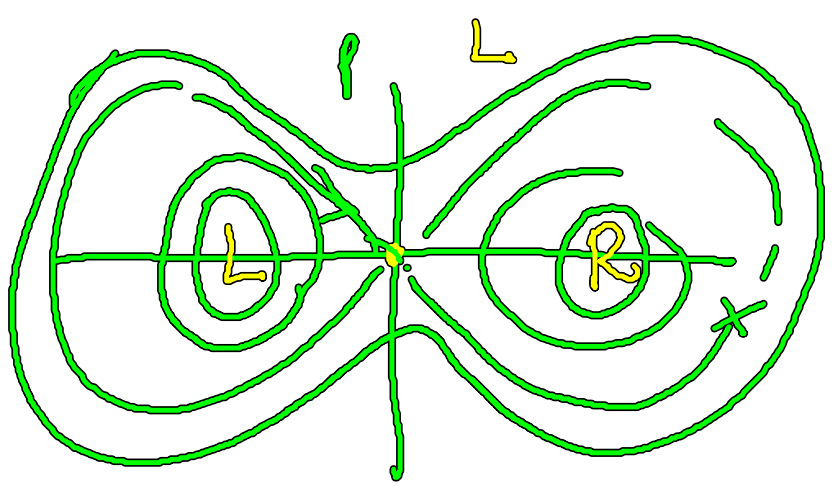
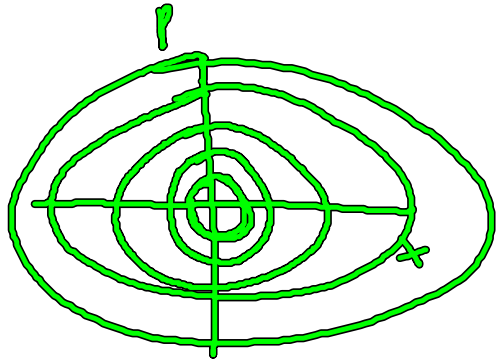
für  $\gamma > 0$ .

Bifurkationsdiagramm:



$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}|\gamma|x^2$$





### 8.4.4. Hopf-Bifurkation.

Standardbeispiel: 
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

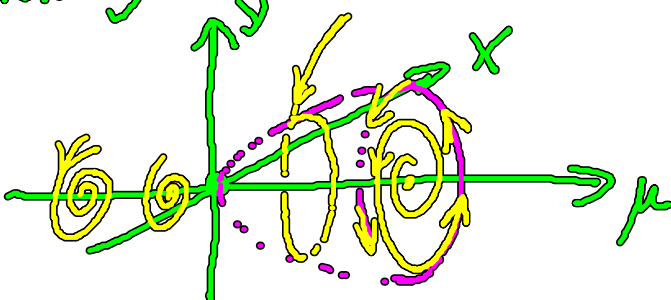
FP  $\underline{x}^* = (0,0)$ , Jacobi-Matrix mit  $\lambda_{\pm} = \mu \pm i$  (Nachrechnen)

$\mu < 0$ :  $\underline{x}^*$  stabiler Strudel,  
wird instabil für  $\mu > 0$ :

Umschreiben in PKO: 
$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

Grenzzyklus mit Radius  $r = \sqrt{\mu}$

Superkritische Hopf-Bifurkation



# Hamiltonsche Systeme und Chaos

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}), \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix}$$

autonomes DS,

ab  $d=3$  kann es chaotische Lösungen geben.

Mech. System mit  $f$  Freiheitsgrade

$\Rightarrow$  Hamiltonsche fl. als dynamisches System  
der Dimension  $d = 2f$ .

Ab  $f=2$  kann es Chaos geben.

Teilchen der Masse  $m$  im Potential  $V(x,y)$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x,y) = E = \text{const}$$

Henon-Heiles-Hamiltonian:  $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy - \frac{1}{3}y^3$

$$\text{in PKO } V(r,\theta) = \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \sin(3\theta)$$

nichtlineares Potential.

Wie kann man die Trajektorien im Phasenraum  $(x,y, p_x, p_y)$   
sinnvoll darstellen.

## Poincaré - Schnitte

Betrachten feste Ebene im Phasenraum, z.B.

$p_x$ - $x$  Ebene mit  $y = 0$

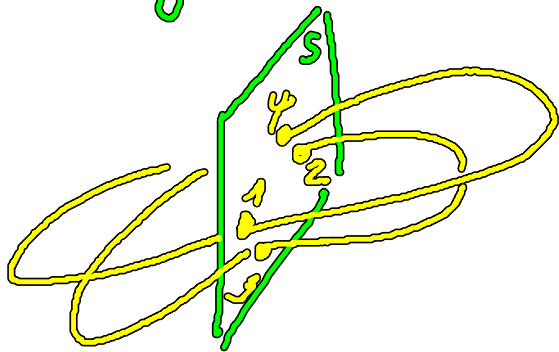
4. Variable  $p_y$  aus  $E = \text{const}$ :

$$p_y = \pm \sqrt{2m \left( E - \frac{p_x^2}{2m} - V(x, 0) \right)}$$

Wir folgen der Trajektorie, die zu bestimmten Zeiten die  $p_x$ - $x$ -Ebene „durchsticht“.

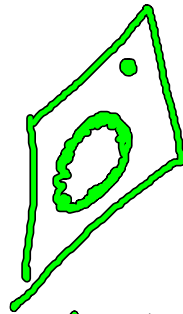
$\Rightarrow$  Zeitentwicklung in der Ebene  $S(p_x, x)$ ,

Abbildung:  $P: S \rightarrow S$



$$\underline{x}_n \rightarrow \underline{x}_{n+1}$$

$$\underline{x}_{n+1} \rightarrow \underline{x}_{n+2}$$



? Poincaré-Abbildung muß durch numerische Lösung des DS bestimmt werden.

$\Rightarrow$  führt auf  $\underline{x}_{n+1} = F(\underline{x}_n)$   
diskretes dynamisches System.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

86. Driddimensionale Systeme

$d = 3 \neq 2f$  nichts Hamiltonsch



# Das Lorenz-Modell (STROGATZ)

$$\dot{x} = \sigma(y-x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

$$\sigma, r, b > 0$$

$\sigma$  Prandtl-Zahl

$r$  Rayleigh-Zahl :  $\frac{\text{Antriebsstärke}}{\text{Dissipation}}$

$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) = -\sigma - 1 - b < 0$$

→ Volumen im Phasenraum der  $(x, y, z)$  schrumpft mit der Zeit  $t$ .

FP :  $C_0 = (0, 0, 0)$

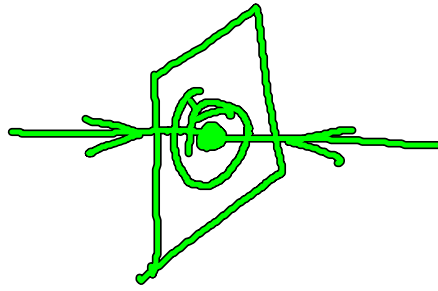
$$C_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1), r > 1$$

$0 < r < 1$  :  $C_0$  stabil

Bei  $r=1$  : Mengedel-Bifurkation, bei der  $C_0$  instabil und  $C_{\pm}$  stabil werden

$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$  :  $C_{\pm}$  sind stabil

$C_{\pm}$



Bei  $\Gamma_H$  :  $C_+$  subkritische Hopf-Bifurkation.

Oberhalb von  $\Gamma_H$  : numerisch, AB (0,1,0)

$$\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$$



aperiodisch.