

## Liapunov-Exponent

Bewegung auf dem Attraktor :

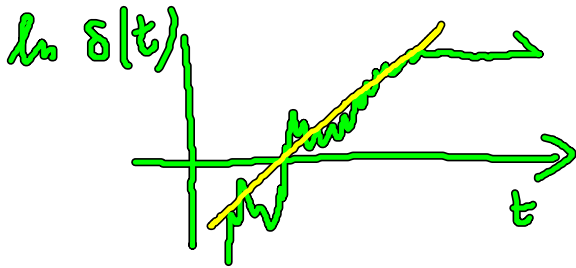
- sehr sensible Abhängigkeit von Anfangsbedingungen

• zwei Punkte  $\underline{x}'$ ,  $\underline{x}$  mit Anfangsabstand

$$\|\underline{x} - \underline{x}'\| = \delta(t=0)$$

• man findet  $\delta(t) \sim \delta(0) e^{\lambda \cdot t}$

$\lambda > 0$  Liapunov-Exponent (qualitativ)

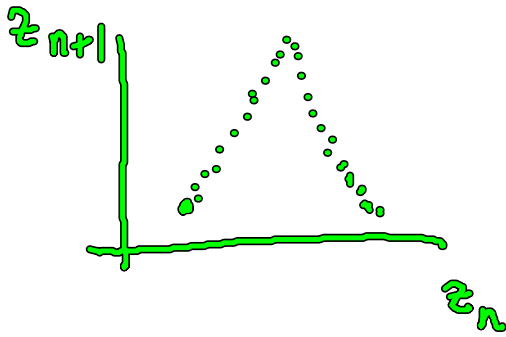


Für Lorenz-System

$\lambda = 0.9$  +  
oszillatorische  
Konvergenz.

## Lorenz-Abbildung

Numerische Berechnung  
 sukzessive Maxima der  
 Funktion  $z(t)$



Iteration

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= \gamma x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

$\sigma, \gamma, b > 0$

Iterierte Abbildung

Diskrete dyn. Systeme

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad n \in \mathbb{N}$$

(Differenzgleichungen)

1d Version

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x_n \in \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

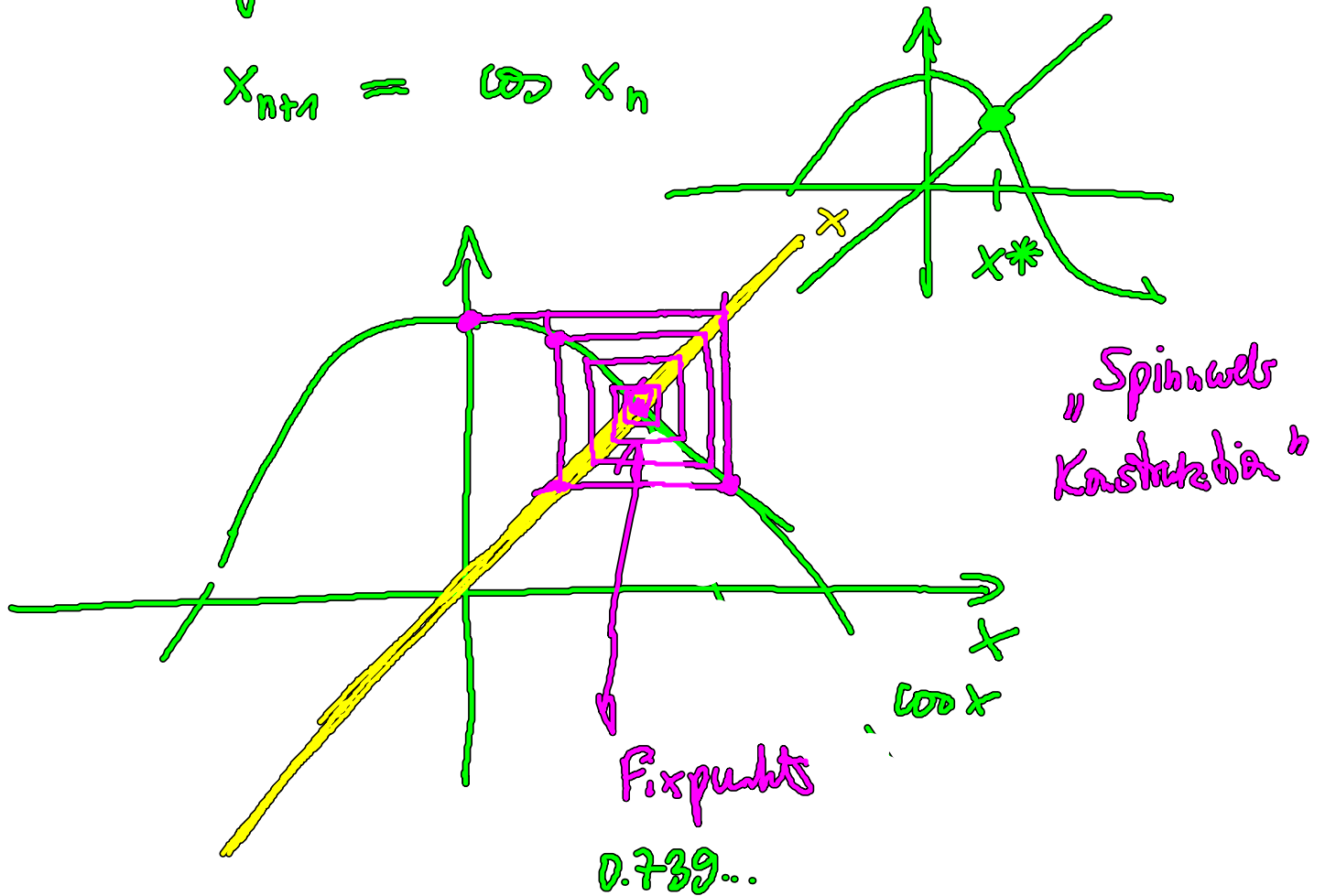
$$\lceil x_{n+1} - x_n = g(x_n)$$

L

Gleichung

$$x = \cos x$$

$$x_{n+1} = \cos x_n$$



$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

Logistische  
Abbildung.

- 1) Fixpunkte  $x^*$  der  
iterierten Abbildung  $x_{n+1} = f(x_n)$   
sind durch  $x^* = f(x^*)$

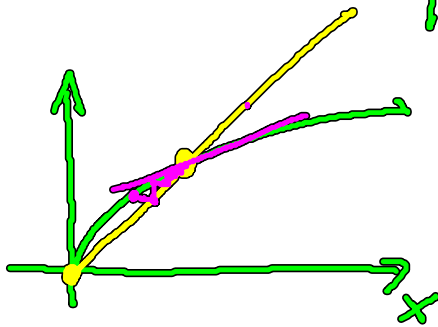
definiert.

Stabilität:

$$|f'(x^*)| < 1, \text{ linear stabil}$$

$$|f'(x^*)| > 1, \text{ linear instabil}$$

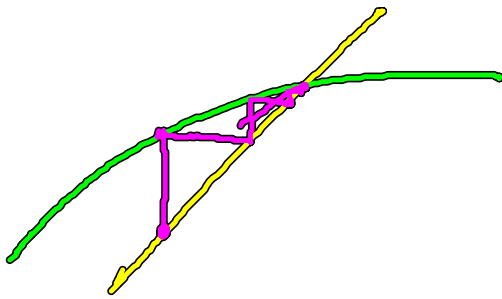
$$|f'(x^*)| = 1 \text{ marginal}$$



$$f(x) = x^{1/2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

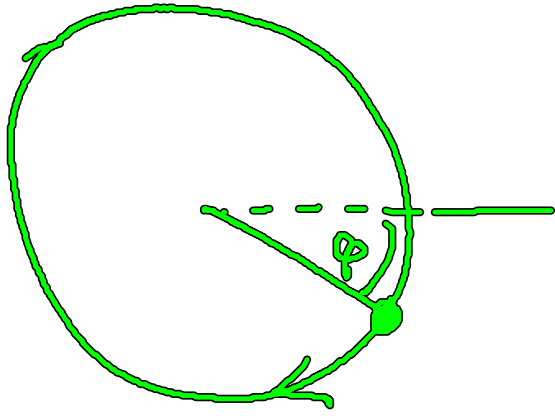
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

$$x^* = \sqrt{x^*}, \quad \text{Lsg. } 0, 1$$



Mechanische Analogie: „Kicked Rotator“

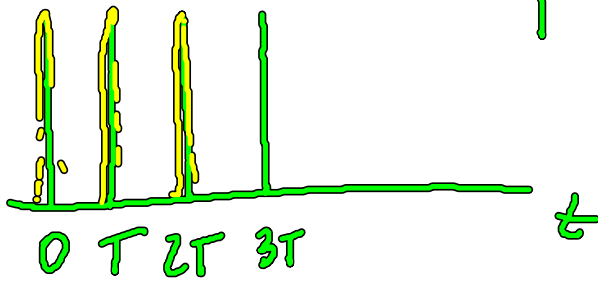
- Teilchen auf Ring



Bewegungsgl. für Winkel  $\varphi$  (Ortsvariable)

$$\ddot{\varphi}(t) + \Gamma \dot{\varphi}(t) = K f(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$T$  Periode

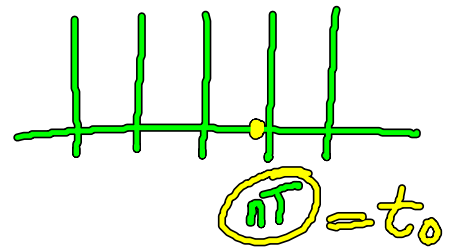


$$\begin{aligned} \varphi &= x \\ \dot{\varphi} &= y \end{aligned}$$

1)  $\dot{x} = y$

2)  $\dot{y} = -\Gamma y + K f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

nicht-autonomes DS



Lösung von 2) als AWP

$$y_n \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(nT - \varepsilon)$$

$$y(t) = e^{-\Gamma(t-nT)} y_n + \int_{nT-\epsilon}^t dt' e^{-\Gamma(t-t')} \sum_{m=0}^{\infty} K f(x(t')) \delta(t'-mT)$$

$$\| x_n \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(nT - \epsilon)$$

$$t = (n+1)T - \epsilon \Rightarrow$$

$$1) y_{n+1} = e^{-\Gamma T} [y_n + K f(x_n)]$$

$$2) x_{n+1} = x_n + \frac{1 - e^{-\Gamma T}}{\Gamma} [y_n + K f(x_n)]$$

Stroboskopisches Bild der Dynamik.

Logistische Abbildung erhält man  
hieraus durch folgendes →

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \infty & \frac{K}{\Gamma} &= 1 \\ \Gamma &\rightarrow \infty & & \\ f(x) &= (r-1)x - rx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + f(x_n) = \\
 &= x_n + (r-1)x_n - rx_n^2 \\
 &= rx_n - rx_n^2 = rx_n(1-x_n)
 \end{aligned}$$

Logistische Abbildung.

Entsprechend kann man andere Formspiele betrachten

→ Héna-Abbildung • SCHUSTER/  
JUST

Logistische Abbildung

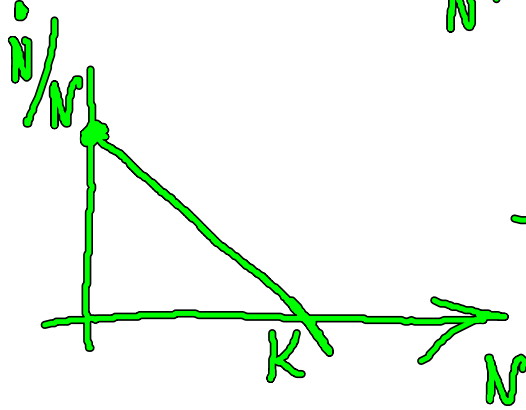
$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n), r \geq 0$$

ist das diskrete Analogon der  
„logistischen Gleichung“: Verhulst 1838

$$\dot{N}(t) = r N(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right), r > 0$$

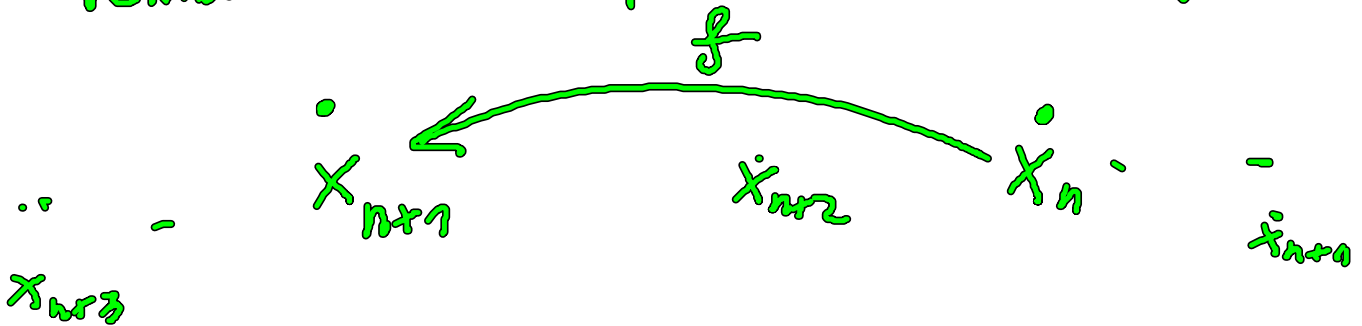
$N(t)$ : Anzahl der Exemplare einer Spezies  
zur Zeit  $t$

Wachstumsrate  $\frac{\dot{N}}{N} = \begin{cases} r > 0 \text{ konstant} \rightarrow \text{exp. Wachstum} \end{cases}$



$$\frac{\dot{N}}{N} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Differenzgleichung weist ein wesentlich komplexeres Verhalten als die entsprechende Differentialgleichung.



Fixpunkte

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad r \geq 0$$

$$x^* = f(x^*) = r x^* (1 - x^*)$$

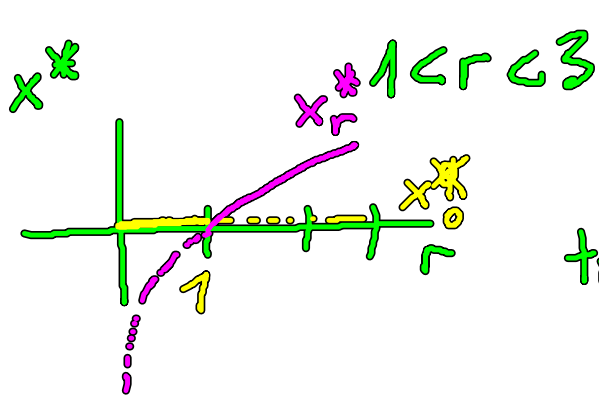
$$\Rightarrow x_0^* = 0$$

$$x_r^* = 1 - \frac{1}{r}$$

Stabilität:

für  $r < 1$  :  $x_0^*$  stabil  
 $x_r^*$  instabil





$1 < r < 3$  :  $x_r^*$  stabil  
 $x_0^*$  instabil

transkritische Bifurkation