2.4. Magnetische Multipole (stationär)

Ausgangspunkt: $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ $\left(\begin{array}{l}\text{Coulomb-} \\ \text{Eichung:} \\ \operatorname{div} \underline{A} \stackrel{!}{=} 0\end{array}\right)$

mit Randbed. $\underline{A}(\underline{r}) \to 0$ für $r \to \infty$

Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ für räumlich-lokalisierte stationäre Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}')$ für $r' \ll r$ um $\underline{r}'=0$:

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\underline{r}\cdot\underline{r}')}{r^3} + \ldots$$

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, (\underline{r}\cdot\underline{r}')\, \underline{j}(\underline{r}') + \ldots$$

Monopol-Term

Mit $\nabla_{r'} \cdot [x_k' \underline{j}(\underline{r}')] = x_k' \underbrace{(\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{j})}_{0 \text{ ! stat. !}} + \underbrace{\underline{j} \cdot \underline{\nabla}_{r'} x_k'}_{j_l \delta_{lk} = j_k} = j_k$

folgt:

$$\int d^3r' \, j_k(\underline{r}') = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} \cdot [x_k' \underline{j}] \stackrel{\text{gauss}}{=} \int_{S_\infty} d\underline{f} \cdot x_k' \underline{j} = 0$$

Monopol-Term verschwindet

Dipol-Term

Mit $(\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} = (\underline{r}\cdot\underline{r}')\, \underline{j} - (\underline{r}\cdot\underline{j})\, \underline{r}'$ $\quad \underset{\underline{r}}{\underline{a}} \times (\underset{\underline{j}}{\underline{b}} \times \underset{\underline{r}'}{\underline{c}}) = \underline{b}(\underline{a}\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\underline{b})$

$$= 2(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} - \left[(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j} + (\underline{r}\cdot\underline{j})\underline{r}'\right] \quad (*)$$

und $\underline{\nabla}_{r'}\cdot\{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\} = \left[(\underline{r}\cdot\underline{r}')j_k + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{j}) + x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{j}}_{0}\right]$ stat.!

folgt

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\, \underline{\nabla}_{r'}\cdot\{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\}}_{\underbrace{\int_{S_\infty} d\underline{f}'\{x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}\}}_{0,\ \text{da}\ \underline{j}\xrightarrow{r\to\infty}0}} = \int d^3r'\left[(\underline{r}\cdot\underline{r}')j_k + (\underline{r}\cdot\underline{j})x_k'\right] = 0$$

$\Longrightarrow$ $[\ldots]$ in $(*)$ gibt keinen Beitrag

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\left(\underline{r}'\times\underline{j}(\underline{r}')\right)}_{\underline{m}\ \text{magn. Dipolmoment}}\times\underline{r} \qquad \text{Dipolpotenzial}$$

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\underline{m}\times\underline{r}}$$

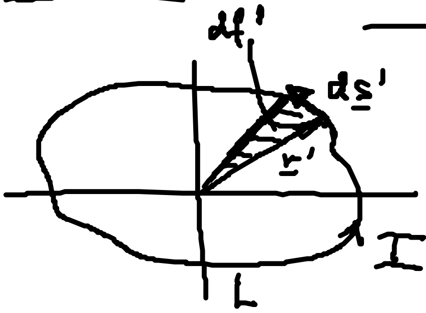
(analog zu $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\underline{p}\cdot\underline{r}$ mit $\underline{p} := \int d^3r'\,\underline{r}'\rho(\underline{r}')$ el. Dipolmoment)

Magn. Induktion des Dipolmoments $\underline{m}$:

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mathrm{rot}\left[\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\underline{m}\times\underline{r}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^5}\left[3(\underline{m}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{m}\right]$$

(analog $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^5}\left[3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}\right]$ el. Dipolfeld)

Beispiel: (i) ebene Leiterschleife L



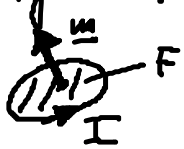
$$d\underline{f}' = \frac{1}{2}\underline{r}' \times d\underline{s}'$$

$$d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') = d\underline{s}'\, I \quad (\text{Strom durch } L)$$

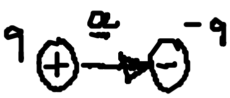
$$\underline{m} = \frac{1}{2}\oint_L d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') = \frac{I}{2}\oint_L \underline{r}' \times d\underline{s}' = I\int_F d\underline{f}' = I\, F\, \underline{n}$$

$\underline{n}$ Normale auf der von L eingeschloss. Fläche F

also: Ringstrom $\rightarrow$ magn. Dipolmoment $\underline{m}$



(analog 2 Pkt. lad. $\rightarrow$ el. Dipolmoment $\underline{p} = q\underline{a}$)



(ii) Bewegte Ladungen

N Teilchen mit Massen m_i und Ladungen q_i, spezif. Ladung $\frac{q_i}{m_i} = \frac{q}{m}$ sei konstant:

$$\varrho(\underline{r}) = \sum_i q_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$

$$\underline{j}(\underline{r}) = \sum_i q_i \underline{v}_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \quad \text{mit Geschw. } \underline{v}_i = \frac{d\underline{r}_i}{dt}$$

magn. Dipolmoment:

$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') = \frac{1}{2}\sum_i q_i \int d^3r'\, \underline{r}' \times \underline{v}_i\, \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i\, \underline{r}_i \times \underline{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \underbrace{\frac{q_i}{m_i}}_{\frac{q}{m}}\, \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i = \frac{q}{2m}\underline{L}$$

$\underline{L}$ Bahndrehimpuls

$$\boxed{\underline{m} = \frac{q}{2m}\underline{L}}$$ gilt auch für starre Körper

gilt nicht für Spin eines Elektrons!

$\underline{m} = g\frac{e}{2m}\underline{S}$ mit $g \approx 2$ Landé-Faktor

<u>Kraft auf Stromverteilung</u> $\underline{j}(\underline{r}') = \rho(\underline{r}')\,\underline{v}(\underline{r}')$
im Feld einer magn. Induktion $\underline{B}(\underline{r}')$ (extern)

$$\underline{B}(\underline{r}') = \underline{B}(\underline{r}) + [(\underline{r}'-\underline{r})\cdot\underline{\nabla}_r]\,\underline{B}(\underline{r}) + \ldots$$ Taylorentw. (Probedipol im geg. $\underline{B}(\underline{r})$)

Lorentz-Kraft $\underline{F} = \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r}')$

$$\Rightarrow \underline{F} = \underbrace{\left[\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\right]}_{0} \times \underline{B}(\underline{r}) + \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times [(\underline{r}'-\underline{r})\cdot\underline{\nabla}_r]\,\underline{B}(\underline{r}) + \ldots$$

kein Monopol! (stat.)

$$= \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \underbrace{[(\underline{r}'\cdot\underline{\nabla}_r)\,\underline{B}(\underline{r})]}_{\underline{\nabla}_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r})) - \underline{r}'\times\underbrace{(\underline{\nabla}_r\times\underline{B}(\underline{r}))}_{0\ (\text{ext.!})}} - \underbrace{\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')}_{0\ (\text{stat.})} \times [(\underline{r}\cdot\underline{\nabla}_r)\,\underline{B}(\underline{r})] + \ldots$$

$$= \underbrace{\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{\nabla}_r(\underline{r}'\cdot\underline{B}(\underline{r}))}_{-\underline{\nabla}_r\times[(\underline{r}'\cdot\underline{B})\,\underline{j}(\underline{r}')] + (\underline{r}'\cdot\underline{B})\underbrace{(\underline{\nabla}_r\times\underline{j}(\underline{r}'))}_{0}}$$

$$= -\underline{\nabla}_r \times (\underline{m}\times\underline{B}(\underline{r})) = (\underline{m}\cdot\underline{\nabla}_r)\,\underline{B}(\underline{r}) = -\underline{\nabla}_r\underbrace{(-\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r}))}$$

Pot. Energie eines Dipols im Magnetfeld $\boxed{V = -\underline{m}\cdot\underline{B}(\underline{r})}$

(analog: $V = -\underline{p}\cdot\underline{E}$ für el. Dipol im Feld)

3. Maxwell-Gleichungen im Vakuum

3.1 Induktionsgesetz

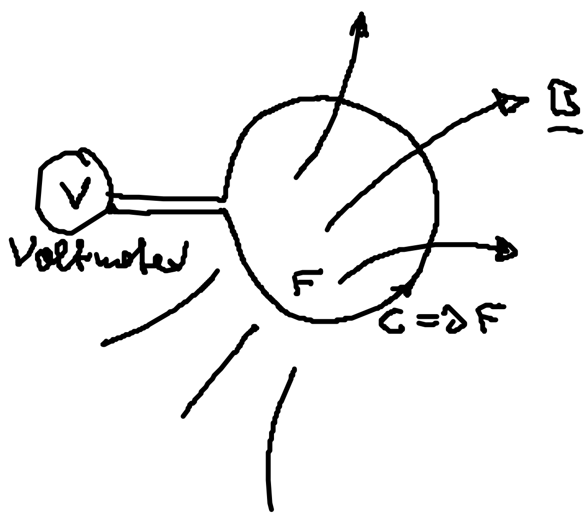
Betrachte nun nichtstationäre Ladungs- und Stromverteilungen u. Felder

Exp. Erfahrung (Faraday 1831):
zeitl. veränderliche Magnetfelder induzieren eine Spannung in einer Leiterschleife:

$$\boxed{\oint_C \underline{E}\cdot d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)}$$

Faraday'sches Induktionsgesetz

mit magn. Fluss $\Phi := \int_F \underline{B}\cdot d\underline{f} = \int_F \mathrm{rot}\,\underline{A}\cdot d\underline{f} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial F} \underline{A}\cdot d\underline{s}$



Änderung des magn. Flusses

a) durch $\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$ (Trafo)

b) durch $\frac{\partial}{\partial t}F$ (Fahrraddynamo) mit Permanentmagnet