

Faraday'sches Induktionsgesetz: $\oint_C \underline{E} \cdot d\underline{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_F \underline{B} \cdot d\underline{f}}_{\Phi}$

\underline{B} magnet. Induktion
 $C = \partial F$ = magnet. Flussschichte

Φ hängt nur vom Rand ∂F von F ab:

$$0 = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} - \int_{F'} d\underline{f} \cdot \underline{B} = \oint_{\partial V} d\underline{f} \cdot \underline{B} = \int_V d\underline{r}^3 \underbrace{\text{div} \underline{B}}_0$$

Potenzialdifferenz bei 1 Umlauf um ∂F : $\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \Delta \Phi$ $\partial V = F \cup F'$

$$\Delta \Phi = U_{\text{ind}} = - \oint_C \underline{E} \cdot d\underline{s} \quad \text{induzierte Spannung}$$

$$\oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_F \text{rot} \underline{E} \cdot d\underline{f} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f}$$

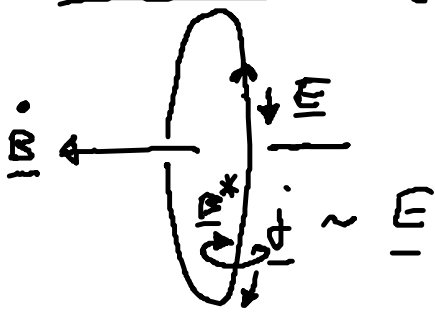
Im Ruhesystem des Leiters (F fest) gilt:

$$\int_F d\underline{f} (\text{rot} \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}) = 0 \quad \text{für bel. } F$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot} \underline{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}} \quad \text{differenzielle Form des Induktionsgesetzes}$$

für nichtstationäre Vorgänge ist \underline{E} ein Wirbelfeld!

Lenz'sche Regel:



$$\begin{aligned}\dot{\underline{B}} &\Rightarrow \underline{E} \text{ induziert } (\text{rot } \underline{E} = -\dot{\underline{B}}) \\ \underline{E} &\Rightarrow \text{Ladungsbeweg.} \Rightarrow \underline{j} \sim \underline{E} \\ \underline{j} &\Rightarrow \underline{B}^* \text{ erzeugt } \left(\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \underline{B}^* = \underline{j} \right)\end{aligned}$$

Also \underline{B}^* ist $\dot{\underline{B}}$ entgegengerichtet!

3.2 Maxwell-Gleichungen

Bisher: $\epsilon_0 \text{div } \underline{E} = \rho$ (Gauss/Coulomb) El. statik

$$\text{div } \underline{B} = 0$$

$$\text{rot } \underline{E} = -\dot{\underline{B}} \quad (\text{Faraday})$$

$$\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad (\text{Ampère}) \quad \text{Magnetostatik}$$

Maxwell's Ergänzung des Ampère'schen Durchflutungsgesetzes für nichtstationäre Vorgänge:

$$\text{Aus } \mu_0 \text{div } \underline{j} = \text{div rot } \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{B}) \equiv 0$$

folgt ein Widerspruch zur Kontinuitätsgl.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0$$

Ausatz: $\text{rot } \underline{B} = \mu_0 (\underline{j} + \underline{j}_0)$

$$\text{mit } \text{div } \underline{j}_0 = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\text{div rot } \underline{B}}_0 - \text{div } \underline{j} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \text{div } \dot{\underline{E}}$$

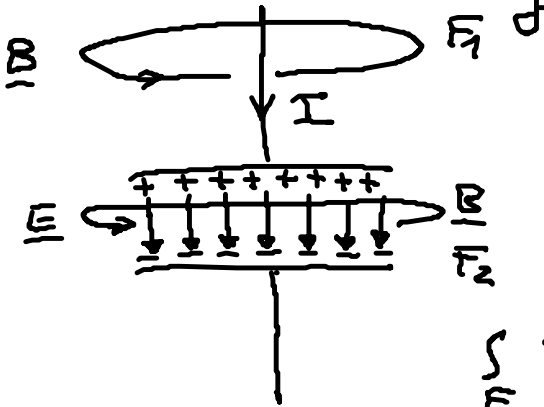
Setze also

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \underline{B} = \underline{j} + \epsilon_0 \dot{\underline{E}}$$

↓
Leitungs-
stromdichte
(Konvektion)

↓
Maxwell'sche
Verschiebungs-
stromdichte

Versanschaulichung der Verschiebungsstromdichte:



Aufladen eines Plattenkondensators
(nichtstationär)

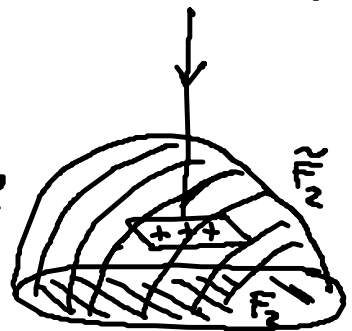
$$\int_{F_1} \text{rot } \underline{B} \cdot d\underline{f} = \mu_0 \int_{F_1} \underline{j} \cdot d\underline{f} \quad (\text{außerhalb des Platten})$$

$$\oint_{\partial F_1} \underline{B} \cdot d\underline{s} = 2\pi r B \quad \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

Ohne Verschiebungsstrom würde sich B beim Übergang von F_1 nach F_2 abrupt auf Null ändern!

Mit Verschiebungsstrom:

$$\int_{F_2} \text{rot } \underline{B} \cdot d\underline{f} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{F_2} \dot{\underline{E}} \cdot d\underline{f} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \int_{F_2} \underline{E} \cdot d\underline{f}$$



Wegen Ladungserhalt. $\frac{\partial Q}{\partial t} = I$ ändert sich Q (geschloss. F_2)
 B dann stetig:

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = \mu_0 I$$

Vollständige Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

Mit den neuen Feldgrößen

$\underline{D}(r,t) := \epsilon_0 \underline{E}(r,t)$ „dielektrische Verschiebung“

$\underline{H}(r,t) := \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(r,t)$ „Magnetfeld“

ergibt sich die differenzielle Form:

$$\begin{array}{l} \text{rot } \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0 \\ \text{div } \underline{B} = 0 \\ \text{div } \underline{D} = \rho \\ \text{rot } \underline{H} - \dot{\underline{D}} = \underline{j} \end{array}$$

} homog. Maxwell-Gln.
WV einer Probeladung mit geg. Feldern $\underline{E}, \underline{B}$

} inhomog. Maxwell-Gln.:
Erzeugung der Felder $\underline{D}, \underline{H}$ durch geg. Ladungen u. Ströme

Integralform:

$$\begin{array}{l} \oint_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_F \underline{B} \cdot d\underline{f}}_{\Phi} \\ \oint_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0 \\ \oint_{\partial V} \underline{D} \cdot d\underline{f} = Q \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Q} \\ \downarrow \end{array} \\ \oint_{\partial F} \underline{H} \cdot d\underline{s} = \int_F \dot{\underline{D}} \cdot d\underline{f} + I \end{array}$$



Zirkulation des el. Feldes entlang einer geschloss. Linie = zeitl. Abnahme des eingeschloss. magn. Flusses Φ

Fluss des magn. Induktion durch geschloss. Fläche (∂V) = 0

Fluss des el. Feldes durch ∂V = eingeschloss. Ladung Q / ϵ_0



Zirkulation des magnet. Feldes entlang einer geschloss. Linie = (diel. Verdräng. Strom + Konvektionsstrom I)