

3.3 TCP - Invarianz

Invarianzeigenschaften der Maxwell-Gln.:

- Lorentz-Invarianz (s. Kap. 6)
- TCP-Invarianz

außerdem:

- linear in $\underline{E}, \underline{B}, \underline{D}, \underline{H}$ (Superpositionsprinzip)
- 1. Ordnung in t (Kausalitätsprinzip:
 $\underline{E}, \underline{B}, \underline{D}, \underline{H}$ zur Zeit $t=0$ soll den Zustand für $t > 0$ vollständig festlegen)

Zeitumkehr $T: t \rightarrow t' = -t$

Ladungsumkehr $C: Q \rightarrow Q' = -Q$

Paritätsumkehr $P: \underline{r} \rightarrow \underline{r}' = -\underline{r}$

NB: Schwache WW verletzt die Paritätserh.
(Pauli 1957)
(P, PC, C, T ist verletzt, aber PCT ist
erhalten)

(i) Zeitumkehr-Transformation

$$T_g := \{ T\text{-invar. Obs. } A : TA = A \}$$

$$= \{ \underline{r}, d\underline{r}, \underline{a} := \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2}, m, q, \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V},$$

$$\underline{F} = m\underline{a}, \underline{E} = \frac{1}{q} \underline{F}, \text{Pot. } \phi, \dots \}$$

„gerade“ unter T

$$T_u := \{ A : TA = -A \} \quad \text{„ungerade“ unter } T$$

$$= \{ \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}, \underline{j} = \rho \underline{v}, \underline{B}, \underline{A}, \dots \}$$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\hat{T}_4 \quad \hat{T}_3$$

\Rightarrow T-Invarianz der Maxwell-Gl.:

$$T: \{ \nabla_x \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0 \} \rightarrow \{ \nabla_x \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0 \}$$

$$T: \{ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \} \rightarrow \{ -\nabla \cdot \underline{B} = 0 \}$$

$$T: \{ \epsilon_0 \nabla_x \cdot \underline{E} = \rho \} \rightarrow \{ \epsilon_0 \nabla_x \cdot \underline{E} = \rho \}$$

$$T: \{ \nabla_x \underline{H} - \dot{\underline{D}} = \underline{j} \} \rightarrow \{ -\nabla_x \underline{H} + \dot{\underline{D}} = -\underline{j} \}$$

Kontinuitätsgl.:

$$T: \{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0 \} \rightarrow \{ -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \underline{j} = 0 \}$$

Die Maxwell-Gl. sind forminvariant!

(ii) Ladungswechsel (-Konjugation)

$$C_g = \{ \underline{E}, \underline{u}, \underline{v}, \underline{a}, \dots \} \text{ gerade unter } C$$

$$C_u = \{ \underline{E} = \frac{1}{q} \underline{F}, \underline{B}, \rho, \underline{j}, \dots \} \text{ ungerade unter } C$$

da $\underline{F} = q \underline{v} \times \underline{B}$

\Rightarrow C-Invarianz der Maxwell-Gl.:

$$C: \{ \nabla_x \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0 \} \rightarrow \{ -\nabla_x \underline{E} - \dot{\underline{B}} = 0 \}$$

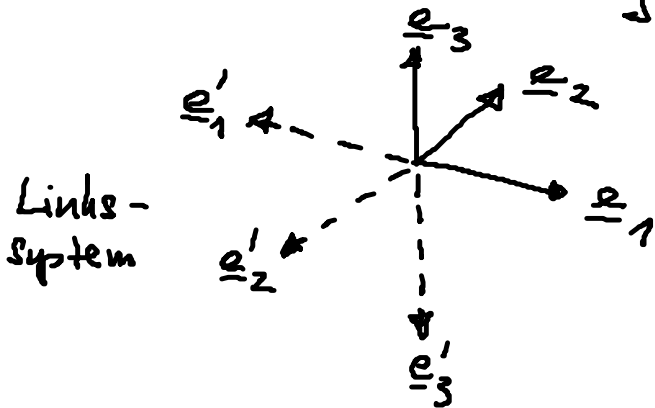
$$C: \{ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \} \rightarrow \{ -\nabla \cdot \underline{B} = 0 \}$$

$$c : \{ \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = \rho \} \rightarrow \{ -\epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = -\rho \}$$

$$c : \{ \nabla \times \underline{H} - \dot{\underline{D}} = \underline{j} \} \rightarrow \{ -\nabla \times \underline{H} + \dot{\underline{D}} = -\underline{j} \}$$

$$c : \{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0 \} \rightarrow \{ -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \underline{j} = 0 \}$$

(iii) Paritätsumkehr (Räumliche Spiegelung am Ursprung, Inversion, Vertauschung rechts \leftrightarrow links)



Rechtssystem

$$P \underline{r} = -\underline{r} \quad \text{"polares" Vektor}$$

aber $P(\underline{a} \times \underline{b}) = (-\underline{a}) \times (-\underline{b}) = \underline{a} \times \underline{b}$ "axialer" Vektor
P-invariant ("Pseudovektor")

Seien $\underline{a}, \underline{b}$ polar

$$\Rightarrow \underline{a} \times \underline{\omega} \quad \text{polar}$$

$\underline{\omega}, \underline{\sigma}$ axiale

$$\underline{a} \times \underline{b}, \underline{\omega} \times \underline{\sigma} \quad \text{axial}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \quad \text{skalar} \quad P(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{b}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{\omega} \quad \text{pseudoskalar} \quad P(\underline{a} \cdot \underline{\omega}) = -\underline{a} \cdot \underline{\omega}$$

$P_g = \{ \text{Skalare } m, q; \text{ axiale Vektoren } \underline{B} \}$ gerade

$$\underline{F} = q \underline{v} \times \underline{B}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ P_u & P_q & P_u & P_q \end{matrix}$

$P_u \{ \text{polare Vektoren } \underline{r}, d\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}, \underline{F}, \underline{E} = \frac{1}{q} \underline{F}, \underline{j} = q \underline{v}, \underline{A}, \text{ Pseudoskalar } \nabla \cdot \underline{B} \}$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

P-Invarianz der Maxwell-Gln. :

$$P : \{ \nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0 \} \rightarrow \{ \nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0 \}$$

$$P : \{ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \} \rightarrow \{ -\nabla \cdot \underline{B} = 0 \} !$$

$$P: \{ \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = \rho \} \rightarrow \{ \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} = \rho \}$$

$$P: \{ \nabla \times \underline{H} - \dot{\underline{D}} = \underline{j} \} \rightarrow \{ -\nabla \times \underline{H} + \dot{\underline{D}} = -\underline{j} \}$$

$$P: \{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0 \} \rightarrow \{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0 \}$$

Lorentz-Kraft $\underline{F} = q (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

soll aus einem Extremal-Prinzip (Hamilton'sches Prinzip) ableitbar sein.

\Rightarrow Zus.hang zwischen $\underline{E}, \underline{B}$ und ϕ, \underline{A}

Suche Lagrange-Fkt. $L(\underline{r}, \underline{v}, t)$, so dass Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0$$

ergibt: $m \ddot{\underline{r}} = q [\underline{E}(\underline{r}, t) + \underline{v} \times \underline{B}(\underline{r}, t)] \quad (*)$

Lagrange-Fkt. $L = \frac{m}{2} v^2 + q [\underline{v} \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) - \phi(\underline{r}, t)]$

Tatsächlich gilt

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial v_k} = m v_k + q A_k(\underline{r}, t) = \text{kinet. Impuls} + \text{„kanon. Impuls“}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} = m \ddot{x}_k + q \frac{d}{dt} A_k(\underline{r}, t)$$

totale Zeitableit. längs einer Bahn $\underline{r}(t)$

$$= m \ddot{x}_k + q \left(\frac{\partial}{\partial t} A_k + \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \dot{x}_l \right)$$

$$= m \ddot{x}_k + q \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \right) A_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = q \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\underline{v} \cdot \underline{A}) - \frac{\partial}{\partial x_k} \phi \right]$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = m \ddot{x}_k + q \frac{\partial}{\partial t} A_k + q \left[(\underline{v} \cdot \nabla) A_k - \frac{\partial}{\partial x_k} (\underline{v} \cdot \underline{A}) \right] + q \frac{\partial}{\partial x_k} \phi$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{-[\underline{v} \times (\nabla \times \underline{A})]_k}$$

$$0 = m \ddot{\underline{r}} + q \left[\frac{\partial}{\partial t} \underline{A} + \nabla \phi - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{A}) \right]$$

Vergleich mit Lorentzkraft $(*)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \underline{A}(\underline{r}, t) - \nabla \phi(\underline{r}, t) \\ \underline{B}(\underline{r}, t) &= \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t) \end{aligned}}$$

damit sind die homog. Maxwell-gln. automatisch erfüllt!

$$\text{div } \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) \equiv 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \times \underline{A}}_{\underline{B}} - \underbrace{\nabla \times (\nabla \phi)}_{\equiv 0} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$$

3.4 Energiebilanz

Die Maxwell-gln. enthalten die Kontin.gl.

$$\text{für } \rho : \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0 \quad (\text{Ladungserhaltung})$$

Frage : weitere Erhaltungssätze für extensive phys. Obs., z.B. Energie, Impuls, Drehimpuls?

(Ext.: additiv bei Systemzusetzung)
Intensiv : z.B. Temp.)

Energietransport durch das el. magn. Feld :

$$\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0 \quad | \cdot \underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j} \quad | \cdot \underline{E}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{H} \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H})}_{\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H})} + \underbrace{\underline{H} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}}_{\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{B} \cdot \underline{B}}{\partial t} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t}} + \underbrace{\underline{E} \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}}_{\epsilon_0 \frac{\partial \underline{E} \cdot \underline{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}} = -\underline{j} \cdot \underline{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} w + \nabla \cdot \underline{S} = -\underline{j} \cdot \underline{E}}$$

Kontin. gl.
= Bilanzgl. für Energie-transport

$$w := \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 = \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}) \quad \underline{\text{Energiedichte}}$$

$$\underline{S} := \underline{E} \times \underline{H} \quad \underline{\text{Energiestromdichte des el. magu. Feldes}}$$

(Poynting-Vektor)

$$q = -\underline{j} \cdot \underline{E} \quad \text{Quelldichte der Feldenergie}$$

(Leistungsdichte)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} w > 0 \quad \text{Abnahme} \\ \frac{\partial}{\partial t} w < 0 \quad \text{Zunahme} \end{array} \right\} \text{ der Feldenergie}$$