

Hertz'sche Dipol

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{El. Dipolstrahl.}$$

Poynting-Vektor (Energiestromdichte):
(Fernzone)

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{E} \times \underline{H} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times \underline{E} = -\frac{c}{\mu_0 r} \underline{B} \times (\underline{B} \times \underline{r}) \\ &= -\frac{c}{\mu_0 r} \left\{ \underbrace{(\underline{B} \cdot \underline{r}) \underline{B}}_0 - B^2 \underline{r} \right\} \quad \text{!} \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \underbrace{\left(\ddot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \underline{r} \right)^2}_{|\ddot{\underline{p}}|^2 r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\underline{r}}{r} \end{aligned}$$

$$\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \frac{\underline{r}}{r}$$



Abstrahlcharakteristik des Hertz'schen Dipols
stark richtungsabhängig!

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t} \quad ; \quad |\ddot{\underline{p}}|^2 = p_0^2 \omega^4 \quad \text{stark frequenzabh.}$$

gute Näherung für eine lineare Antenne \rightarrow

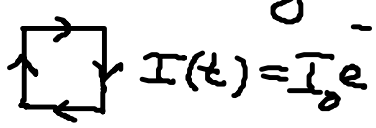
240

Magn. Dipol-, d. Quadrupolstrahlung

Die niedrigste Ordnung des Multipolentw. von $\underline{A}(\underline{r}, t)$ verschwindet für quellenfreie Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}', \tau)$:

$$\underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{j}(\underline{r}', \tau) = -\frac{\partial \rho(\underline{r}', \tau)}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3r' \underline{r}' \dot{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(\tau) \equiv 0 \quad \text{in el. Dipolnäherung keine Abstrahlung!}$$

Beispiel: geschlossene Leiterschleife (Rahmenantenne)  $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$

2. Ordnung

$$\underline{A}^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \underline{j}(\underline{r}', \tau)$$

$$\text{Mit } (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \tau) = \frac{1}{2} (\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} + \frac{1}{2} [(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} + (\underline{r} \cdot \underline{j}) \underline{r}']$$

$$\text{und } \underline{\nabla}_{r'} \cdot \{x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}'\} = [(\underline{r} \cdot \underline{r}') j_k + x'_k (\underline{r} \cdot \underline{j})] + x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{\nabla}_{r'} \cdot \underline{j}'$$

bzw. integriert $\int \frac{\partial}{\partial r'_i} \rho$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d\tau \nabla_{\underline{r}} \cdot \{ \underline{r}' (r r')_j \}}_0 \text{ (gauge),} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d\tau^3 [(r r')_j + (r_j r')]} - \int_{\mathbb{R}^3} d\tau^3 (r r') \underline{r}' \cdot \underline{e} \dots$$

folgt:

$$\int d\tau^3 (r r')_j (r', \tau) = \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int d\tau^3 (r' \times \underline{j}(r', \tau) \right]}_{\underline{m}(\tau) \text{ magn. Dipolmoment}} \times \underline{r} + \frac{1}{2} \int d\tau^3 (r r') \underline{r}' \cdot \underline{e}$$

El. Quadrupolmoment - Tensor:

$$\underline{\underline{Q}}(\tau) = \int d\tau^3 \rho(r', \tau) (3 \underline{r}' \otimes \underline{r}' - r'^2 \underline{1}) =: \tilde{\underline{Q}} - \frac{1}{3} (S_p \tilde{\underline{Q}}) \underline{1}$$

falls $\tilde{\underline{Q}}(\tau) \text{osz.} = \text{„breathing mode“}$
 \Rightarrow kein Beitrag zu $\underline{E}, \underline{B}$



$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{r} = 3 \int d\tau^3 \rho(r', \tau) \underline{r}' (r' \cdot \underline{r})$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\underline{m}(\tau) \times \underline{r} + \frac{1}{6r^3} \underline{\underline{Q}}(\tau) \underline{r} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r^3} \underline{m} \times \underline{r} + \frac{1}{c r^2} \dot{\underline{m}} \times \underline{r}}_{\text{magn. Dipol-Strahlung}} + \underbrace{\frac{1}{6 r^3} \ddot{\underline{Q}} \cdot \underline{r} + \frac{1}{6 c r^2} \ddot{\underline{Q}} \cdot \underline{r}}_{\text{el. Quadrupol-Strahlung}} \right\}$$

$$A_m^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) \right] \quad \text{magn. Dipolstrahl.}$$

Skalares Pot. aus Lorenz-Eichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\underline{r}, t) = -c^2 \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \nabla \cdot (\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{da } \nabla \cdot \underline{A} = 0$$

Felder in Fernfeldnäherung:

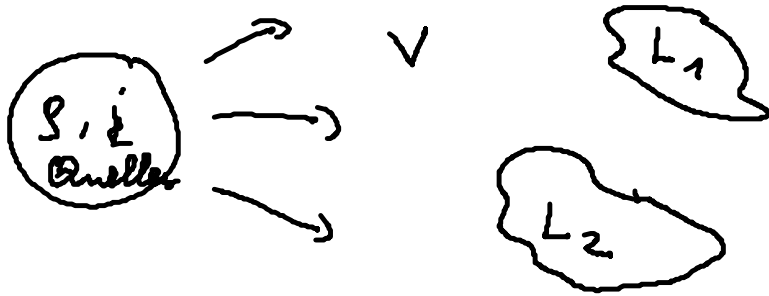
$$\underline{B}_m(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\ddot{\underline{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} \right] \times \underline{r} \quad (r \gg \lambda \gg a)$$

$$\underline{B}_{\text{el. Q}}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\frac{1}{6} \ddot{\underline{Q}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \underline{r} \right] \times \underline{r}$$

$$\underline{E} = c(\underline{B} \times \frac{\underline{r}}{r}) \quad \text{wie für el. Dipolstrahl.}$$

4.4 Wellenoptik und Beugung

Problem: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen bei geg. lokalisierten Quellen $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und vorgegebenen Leitern L_α im Vakuum.



Ziel : Berechnung des Wellenfeldes im Außenraum

Anwendung : Radiowellen ($\lambda \sim 1 - 10^4 \text{ m}$)
Radar

Optik ($\lambda \sim 400 - 800 \text{ nm}$) \rightarrow Beugung

Zurückführung auf Randwertaufgabe

Lösung der inhomogenen Wellengl.

$$\left. \begin{aligned} \square \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned} \right\} \text{Lorenzgleichung}$$

zu vorgeg. $\rho(\underline{r}, t)$ u. $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und Randbed.
auf L_2 sowie Kausalitätsbed. (Ausstrahlbed.).

$$\left. \begin{aligned} \underline{\rho}(\underline{r}, t) &= \underline{\rho}(\underline{r}) e^{-i\omega t} \\ \underline{j}(\underline{r}, t) &= \underline{j}(\underline{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{o.BdA wegen} \\ \text{Fourierzerlegung}$$

(period. Erregung)

$$\Rightarrow \begin{aligned} \phi(\underline{r}, t) &= \phi(\underline{r}) e^{-i\omega t} \\ \underline{A}(\underline{r}, t) &= \underline{A}(\underline{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

eingesetzt in die Wellengl. $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

$$\boxed{(\Delta + k^2) \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})} \quad \text{mit} \quad \boxed{k := \frac{\omega}{c}}$$

Green'sche Fkt. der Wellengl. (§4.2) $\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$:

$$\square G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$$

$$\begin{aligned} \text{allg. L\u00f6s. } \phi(\underline{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^t dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \rho(\underline{r}', t') / \epsilon_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\int_{-\infty}^t dt' G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') e^{-i\omega t'}}_{\left(\int_0^{\infty} d\tau G(\underline{r}-\underline{r}', \tau) e^{i\omega\tau} \right) e^{-i\omega t}} \rho(\underline{r}') / \epsilon_0 \\ &=: \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \end{aligned}$$

period. Zeitabh\u00e4ngigkeit abseparieren:

$$\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &= \int d^3r' \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}') / \epsilon_0 \\ \text{mit } (\Delta + k^2) \tilde{G}(\underline{r}-\underline{r}') &= -\delta(\underline{r}-\underline{r}') \end{aligned}$$