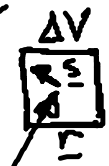
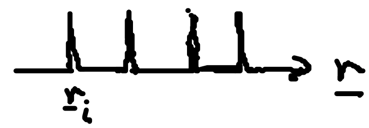
Polarisation $\equiv$ makroskop. el. Dipoldichte

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\ \underline{P}_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$



<u>Analog</u>:

mikroskop. Dipoldichte $\underline{P}_m(\underline{r},t) = \sum_i \underline{p}_i(t)\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_i)$



mikroskop. Pot. der el. Dipole $\underline{p}_i$

$$\phi_m(\underline{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underline{\nabla}_r\left\{\sum_i \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}\underline{p}_i\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}_i|}{c}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\ \underline{\nabla}_r\left\{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underline{P}_m\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right\}$$

makroskop. gemitteltes el. Dipolpot.:

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s\ \phi_m(\underline{r}+\underline{s},t)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'\ \underline{\nabla}_r\left\{\frac{\underline{P}_m\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}'|}\right\}$$

$$\overset{\underline{r}''=\underline{r}'-\underline{s}}{=} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3} d^3r''\ \underline{\nabla}_r\left\{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}''|}\underbrace{\underline{P}\left(\underline{r}'',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}''|}{c}\right)}_{\text{makroskop. Dipoldichte}}\right\}$$

Umformung:

$$\nabla_r \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{P}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \right\} = - \overbrace{\nabla_{r'} \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{P}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \right\}}^{\dots}$$

$$+ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \nabla_{r'} \underline{P}(\underline{r}', t') \Big|_{t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}$$

$$\Rightarrow \Phi(\underline{r}, t) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \, \nabla_{r'} \{ \dots \}}_{=0 \ (\text{ganz } \beta)} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\left[-\nabla_{r'} \underline{P}(\underline{r}', t') \right]_{t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}}_{\varrho_p\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}}_{\circledast}$$

$\circledast$ ist das makroskop. Pot. einer Ladungsdichte ϱ_p

$$\boxed{\varrho_p(\underline{r}, t') = - \nabla_{r'} \underline{P}(\underline{r}', t')}$$

$\downarrow$

Polarisation $\underline{P} := -\epsilon_0 \underline{E}_p$

5.2 Magnetisierung

Mikroskop. Ursache für den Magnetismus der Materie sind mikroskop. magnet. Dipolmomente $\underline{m}$:

(a) Für $\underline{B} = 0$ vorhandene perm. magn. Momente $\underline{m}$ werden zur Minimierung der pot. Energie

$$W_{magn} = -\underline{m} \cdot \underline{B}$$

vorzugsweise (gegen die therm. Bewegung) $\uparrow\uparrow \underline{B}$ orientiert (z.B. Bahn- u. Spinmomente von El.)

$\rightarrow$ <u>paramagn. Verhalten</u>

(b) Durch $\underline{B}$ können nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz Kreisströme induziert werden.

Lenz'sche Regel $\Longrightarrow$ Magnetisierung $\downarrow\uparrow \underline{B}$

$\rightarrow$ <u>diamagnet. Verhalten</u>

<u>makroskop. gemittelte Felder</u>

mikroskop. magn. Dipoldichte $\underline{M}_m(\underline{r}, t) = \sum_i \underline{m}_i(t)\,\delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$

Mittelung über kleines makrosk. Vol. ΔV:

$$\underline{M}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3 s\; \underline{M}_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$$

<u>Magnetisierung</u> = <u>makroskop. magn. Dipoldichte</u>

<u>Ziel</u>: Zus.hang zwischen $\underline{M}$ und den effektiven Feldern $\underline{B}$ in der Materie.

Zeige, dass eine Magnetisierungsstromdichte $\underline{j}_M$ als Ursache der Felder eingeführt werden kann.

$$\underline{\nabla} \times \underline{B}_M = \mu_0 \underline{\dot{j}}_M \qquad \text{bzw.} \quad \underline{\nabla} \times \underline{M} = \underline{j}_M$$

eff. Gesamtinduktion (stat. Fall)

$$\underline{B}' = \underline{B} + \underline{B}_M \quad \Rightarrow \quad \underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}'\right) = \underbrace{\underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\right)}_{\underline{\dot{j}}} + \underline{\dot{j}}_M$$

Erzeugung durch freie Ströme:

$$\boxed{\underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B}' - \underline{M}\right) = \underline{\dot{j}}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}(\underline{B}' - \underline{B}_M) = \frac{\underline{B}}{\mu_0}$$

Betrachte Vektorpot. der mikroskop. el. u. magn. Dipole (§ 4.3)

$$\underline{A}_m(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \underbrace{\underline{\dot{p}}_i\left(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_i|}{c}\right)}_{\text{el. Dipolmoment}} + \underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \underbrace{\underline{m}_i\left(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_i|}{c}\right)}_{\text{magn. Dipolmoment}} \right) \right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underbrace{\underline{\dot{P}}_m\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right)}_{\text{mikr. el. Dipoldichte}} + \underline{\nabla}_r \times \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underbrace{\underline{M}_m\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right)}_{\text{magn. Dipoldichte}} \right) \right\}$$

makroskop. gemitteltes Pot.:

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \; \underline{A}_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{\dot{P}}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) + \underline{\nabla}_r \times \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{M}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) \right) \right\}$$

makrosk. Dipoldichten

Umformung

$$\int d^3r' \, \underline{\nabla}_r \times \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{M}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \right\} = \underbrace{- \int d^3r' \, \underline{\nabla}_{r'} \times \{ \dots \}}_{0 \text{ (gauß)}}$$

$$+ \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left[\underline{\nabla}_{r'} \times \underline{M}(\underline{r}', t') \right]_{t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} =: t^{\text{ret}}}$$

Def.: Magnetisierungsstromdichte $\quad \underline{j}_M := \underline{\nabla} \times \underline{M}$

Polarisationsstromdichte $\quad \underline{j}_P := \frac{\partial}{\partial t} \underline{P}$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left\{ \underline{j}_P(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_M(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \right\}$$

erzeugt durch Polarisations- u. Magnetisierungsstromdichte

Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_P = - \underline{\nabla} \cdot \underline{\dot{P}} = - \underline{\nabla} \underline{j}_P$$

$$\boxed{\dot{\rho}_P + \operatorname{div} \underline{j}_P = 0}$$ Erhaltung der Polarisationsladung

5.3. Maxwell-Gleichungen in Materie

Vollständige Pot. enthalten

- freie Ladungs- u. Stromdichten ρ, $\underline{j}$
- Polarisations- u. Magnetisierungsbeiträge ρ_P, $\underline{j}_P$, $\underline{j}_M$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left\{ \underline{j}(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_P(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_M(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \right\}$$

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left\{ \rho(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \rho_P(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \right\}$$

$\underline{A}, \phi$ sind also Lösungen der inhom. Wellenglн.

$$\left.\begin{aligned} \Box \underline{A}(\underline{r},t) &= -\mu_0 \left(\underline{j} + \underline{j}_P + \underline{j}_M\right) \\ \Box \phi(\underline{r},t) &= -\frac{1}{\epsilon_0}\left(\rho + \rho_P\right) \end{aligned}\right\} \text{ Lorenz-Eichung}$$

Für die Felder $\underline{E}, \underline{B}$ in Materie folgt

$$\underline{E} := -\frac{\partial}{\partial t} A - \underline{\nabla}\phi$$

$$\underline{B} := \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &(1) \quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} B \\ &(2) \quad \underline{\nabla} \cdot B = 0 \end{aligned}\right\} \text{ wie im Vakuum}$$