

$$\underline{E} := -\frac{\partial}{\partial t} \underline{A} - \underline{\nabla} \phi$$

$$\underline{B} := \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}}_{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi} - \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \phi = -\square \phi \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \underline{\nabla} \cdot \underline{P}) \end{aligned}$$

(Lorenz-Gleichung)

$$(3) \quad \underline{\nabla} \cdot (\underbrace{\epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}, t) + \underline{P}(\underline{r}, t)}_{\underline{D}(\underline{r}, t) \text{ diel. Verschiebung}}) = \rho(\underline{r}, t)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A}) = \underline{\nabla} (\underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{A}}_{-\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi} \text{ (Lorenz)}) - \Delta \underline{A}$$

$$= -\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\underline{\nabla} \phi}_{-\underline{E} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}}$$

$$= -\square \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$= \mu_0 \left( \underline{j} + \underbrace{\dot{\underline{P}}}_{\underline{\nabla} \times \underline{M}} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}}_{\underline{D}}) + \mu_0 \underline{\nabla} \times \underline{M} + \mu_0 \underline{j}$$

$$\Rightarrow (4) \underline{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M} \right) = \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}$$

$\underline{H} (=, t)$  Magnetfeld (nur durch die freien Ströme erzeugt)

Zusammenfassung der Maxwellgl.:

|     |                                                                                                       |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1) | $\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$             |
| (2) | $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$                                                          |
| (3) | $\underline{\nabla} \cdot \underline{D} = \rho$                                                       |
| (4) | $\underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t} \underline{D} = \underline{j}$ |
| (5) | $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$                                            |
| (6) | $\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$                                       |

} WW der Felder mit Probeladungen

} Erzeugung der Felder durch freie Ladungen u. Ströme

Die Feldgl. (1) - (6) sind nicht vollständig!

Ergänzung durch Materialgleichungen notwendig.

(Zus.hang  $\underline{P} \leftrightarrow \underline{E}$ ,  $\underline{M} \leftrightarrow \underline{B}$ )

Einfachster Fall:

(i) isotrope Materie  $\Rightarrow$   $\underline{P} \uparrow \uparrow \underline{E}$   
 $\underline{M} \uparrow \uparrow \underline{B}$  oder  $\underline{M} \uparrow \downarrow \underline{B}$  } skalares  
 (paramagn.) (diamagn.) } Zus.hang

(ii) nicht zu hohe Felder  $\Rightarrow$   $\underline{P} \sim \underline{E}$   
 $\underline{M} \sim \underline{B}$  } lineares  
Zus.hang

(iii) kein Gedächtniseffekt }  $\underline{P}(\underline{r}, t) \sim \underline{E}(\underline{r}, t)$   
 keine nichtlokale Wkr }  $\underline{M}(\underline{r}, t) \sim \underline{B}(\underline{r}, t)$  } instantaner,  
lokale  
Zus. hang

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

$$\underline{M} = \chi_M \underline{H}$$

elektr. Suszeptibilität  $\chi_e$   
magn. Suszeptibilität  $\chi_M$   
 (Materialkonstanten)

Die Materialkonstanten müssen aus mikroskop. Theorien (z.B. QM) abgeleitet werden.

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$$

mit  $\epsilon := 1 + \chi_e$  (relat. Dielektrizitätskonst.)  
permittivity

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) = \mu_0 (1 + \chi_M) \underline{H} = \mu_0 \mu \underline{H}$$

mit  $\mu := 1 + \chi_M$  (relat. Permeabilität)

$$\Rightarrow \underline{M} = \chi_M \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_M}{\mu} \underline{B} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\frac{\chi_M}{1 + \chi_M}}_{\substack{> 0 \text{ paramagnet.} \\ < 0 \text{ diamagnet.}}} \underline{B}$$

paramagn.  $\chi_M > 0 \Rightarrow \mu > 1$

diamagn.  $-1 < \chi_M < 0 \Rightarrow 0 < \mu < 1$

Bem.: (i)  $\underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{P} = 0$  beschreibt kein Ferroelektrikum!

$\underline{B} = 0 \Rightarrow \underline{M} = 0$  kein Ferromagnet!

(ii) stets  $\chi_e > 0$   
 aber  $\chi_M \geq 0$  Para- magnet  
 Dia- magnet

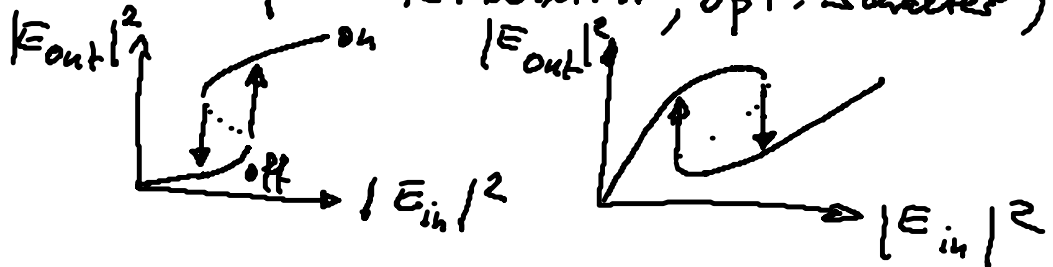
(iii)  $\underline{P} \sim \underline{B}$  oder  $\underline{M} \sim \underline{E}$  kann nicht auftreten,  
wegen des falschen Raumspiegelungsverhaltens (vgl. § 3.3):  
 $\underline{E}, \underline{P}$  polare Vektoren,  $\underline{B}, \underline{M}$  axiale Vektoren  
 $\rho_p = -\text{div } \underline{P}$  Skalar,  $\underline{j}_M = \nabla \times \underline{M}$  polare Vektor

(iv) Abweichungen

- für anisotrope Kristalle:  $\underline{P} = \epsilon_0 \underline{\chi}_e \underline{E}$   
 (symm. Tensor  $\underline{\chi}_e$ )

- für starke Felder:  $\underline{P} = \epsilon_0 (\chi_e^{(1)} \underline{E} + \chi_e^{(3)} \underline{E}^3 + \dots)$

(Anwendung: opt. Nichtlinearität,  
 z. B. opt. Bistabilität, opt. Schalter)



- für hochfrequenter Felder:

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \int d^3 r' dt' \underline{\chi}_e(\underline{r}, \underline{r}', t, t') \underline{E}(\underline{r}', t')$$

(räumliche bzw. zeitliche Dispersion)

$$\hat{\underline{P}}(\underline{k}, \omega) = \epsilon_0 \hat{\underline{\chi}}_e(\underline{k}, \omega) \hat{\underline{E}}(\underline{k}, \omega)$$

## 5.4. Grenzbedingungen für Felder

Frage:  $\underline{E}, \underline{D}, \underline{H}, \underline{B}$  an Grenzflächen, die  
 verschiedene ab. u. magr. Materialien  
 (oder Vakuum / Materie) trennen?

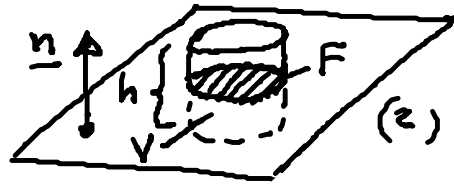
Integration der Maxwell-Gln. über Volumen,  $V$ :

$$(1) \int_V d^3r \nabla \times \underline{E} = - \int_V d^3r \dot{\underline{B}}$$

$$(2) \int_V d^3r \nabla \times \underline{H} = \int_V d^3r (\underline{j} + \dot{\underline{D}})$$

$$(3) \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{B} = 0 \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \underline{B}$$

$$(4) \int_V d^3r \nabla \cdot \underline{D} = \int_V d^3r \rho \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \underline{D}$$



Normalkomp.

$$\underline{h \rightarrow 0} : (3) \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \underline{B} = \int_F d\vec{f} (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) = \int_F d\vec{f} \underline{n} (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)})$$

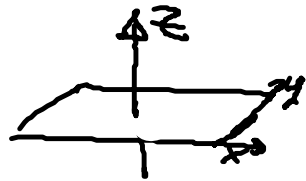
Deckel Boden  
der Dose

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \underline{D} = \int_F d\vec{f} (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) = \int_F d\vec{f} \underline{n} (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)})$$

Annahme: Grenzfläche trägt freie Flächenladungsdichte  $\sigma$ :

$$\rho(\underline{r}, t) = \sigma(x, y, t) \delta(z)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_V d^3r \rho = \int_F d\vec{f} \sigma$$



Also für bel. Fläche  $F$ :

$$\int_F d\vec{f} \underline{n} (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{n} (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) = 0$$

$$\int_F d\vec{f} \underline{n} (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) = \int_F d\vec{f} \sigma$$

$$\Rightarrow \underline{n} (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) = \sigma$$