

Polarisierbarkeit

$$p = \epsilon_0 \alpha \underline{E}_a$$

mikrosk.
el. Dipol

Lokalfeld

Polarisation

$$\underline{P} = n \underline{p} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}_a$$

(n mittlere Atombichte)
mikr.

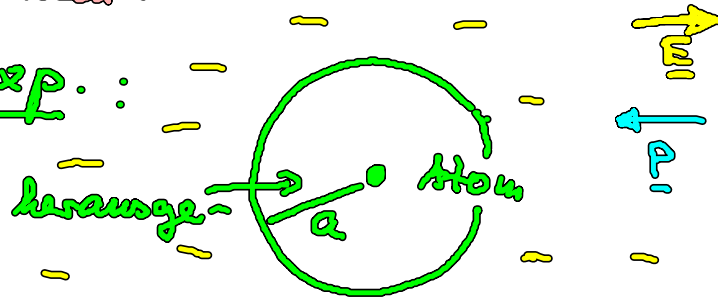
Selbstkonsistente Berechnung des Lokalfeldes \underline{E}_a

Ziel: makrosk. Feld \underline{E} \leftrightarrow Lokalfeld \underline{E}_a

berücksichtige Felder, die durch die anderen el. Dipole erzeugt werden!

Gedankenexp.

dies. Kugel herausgeschnitten



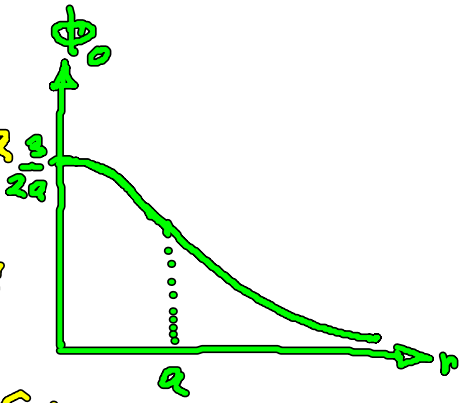
polarisierbares Dielektrikum

Feld einer homogen polarisierten Kugel :

a) homogen geladene Kugel

$$\underline{E}_0(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{a^3} & r \leq a \\ \frac{1}{r^2} & r \geq a \end{cases}$$

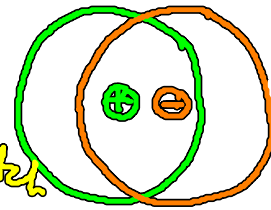
$$\Rightarrow \phi_0(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} c - \frac{r^2}{2a^3} & r \leq a \\ \frac{1}{r} & r \geq a \end{cases}$$



Bestimmung der Integrat. konst. c:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_0(a-\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_0(a+\epsilon) \Rightarrow c = \frac{3}{2a}$$

b) homogen polarisierte Kugel:



Überlagerung von 2 entgegengesetzten
homogen geladenen Kugeln mit Abstand r_0 , $r_0 \rightarrow 0$:

$$\phi(r) = \phi_0(r - \frac{1}{2}r_0) - \phi_0(r + \frac{1}{2}r_0)$$

Taylor

$$\approx -r_0 \underbrace{\nabla \phi_0(r)}_{-\underline{E}_0} = r_0 \underline{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{p \cdot \underline{r}_0 \cdot \underline{r}}{a^3} & r \leq a \\ \frac{Q r_0 \underline{r}}{r^3} & r \geq a \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{p \cdot \underline{r}}{a^3} & r \leq a \\ \frac{p \cdot \underline{r}}{r^3} & r \geq a \end{cases}$$

mit $\underline{p} = Q r_0$
(el. Dipolmoment der
herausgemittelten
Kugel)

Mit der Polarisation $\underline{P} = \frac{\underline{E}}{\frac{4\pi}{3} a^3}$ läßt sich ρ beschreiben

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \cdot \underline{r} & r \leq a \quad \text{homog polarisiert} \\ \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \underline{P} \cdot \underline{r} & r \geq a \quad \text{Dipolpotenzial} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}_{\text{Kugel}} = -\nabla\phi = -\frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}} \quad (r \leq a)$$

Innenfeld des homog. polarisierten Kugel

gesamtes Lokalfeld am Ort des Atoms

$$\underline{E}_a = \underline{E}^{\text{außen}} + \underline{E}^{\text{innen}}$$

durch Atome
im Innern der
Hohlkugel erzeugt = 0 (für kub. Symm.)

Lokalfeld \underline{E}_a im Innen des Kugelhohlraums, der aus dem Diele herausgeschnitten wurde:

$$\underline{E}_a + \underline{E}_{\text{Kugel}} = \underline{E}$$

Lokalfeld am Ort des Atoms Innenfeld der diele. Kugel mittleres makroskop. Feld

(wie der in dem Hohlraum eingesetzt)

$$\Rightarrow \underline{E}_a(r) = \underline{E} - \underline{E}_{\text{Kugel}}$$

$$\boxed{\underline{E}_a = \underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}}$$

Lorentz-Lorentz

Lokal-
feld makr.
Feld Korrekturfeld
(Lorentz)

Zus.hang zwischen \underline{P} und makroskop. Feld \underline{E} :

$$\underline{P} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}_a = \epsilon_0 n \alpha \left(\underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{P} = \epsilon_0 \kappa_e \underline{E}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\kappa_e = \frac{n \alpha}{1 - \frac{1}{3} n \alpha}}$$

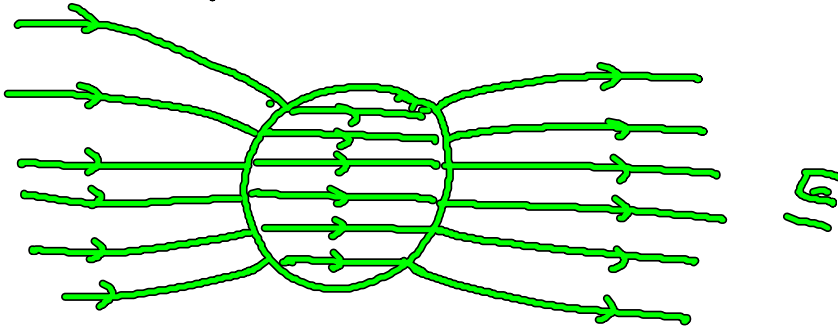
$$\kappa_e \left(1 - \frac{1}{3} n \alpha \right) = n \alpha$$

$$\kappa_e = n \alpha \left(1 + \frac{\kappa_e}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{n \alpha = \frac{\kappa_e}{1 + \frac{1}{3} \kappa_e} = \frac{\epsilon - 1}{1 + \frac{\epsilon - 1}{3}} = 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}}$$

Formel von Clausius-Mossotti

Feld einer polaris. Kugel im homog. Feld \underline{E}



5.6 Wellenausbreitung in Materie

Ann.: homogene, isotrope, lineare Medien
mit skalaren Materialpar. ϵ , μ , σ Leitfähigkeit

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$$

$$(\epsilon > 1)$$

$$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H}$$

$$(\text{i.a. } \mu \approx 1)$$

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}$$

$$(\text{Ohm'sches Gesetz})$$

a) Wellen in leitenden Medien ohne Dispersion
 (d.h. ϵ, μ, σ unabh. v. ω)

Sei $\rho = 0$

$$\nabla_x \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$

$$\nabla_x \underline{B} - \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \dot{\underline{E}} = \mu_0 \mu \underline{j} = \mu_0 \mu \sigma \underline{E} \quad \left| \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{B} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \nabla_x (\nabla_x \underline{E}) = \underbrace{\nabla (\nabla \cdot \underline{E})}_0 - \Delta \underline{E} = -\nabla_x \dot{\underline{B}} = -\mu \mu \epsilon_0 \epsilon \dot{\underline{E}} - \mu_0 \mu \sigma \underline{E}$$

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2} (\ddot{\underline{E}} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \dot{\underline{E}}) = 0$$

gedämpfte Wellengl. mit $c_M := \frac{1}{\sqrt{\mu \mu \epsilon_0 \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

(1-dim.: Telegraphengl., beschreibt Diffusionsausbreitung)

Harmon. ebene Welle (spezielle Lösung)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} (1 + i \frac{1}{\omega \tau})} \quad (\text{Dispersions-Relat.})$$

$\tau := \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$ dielektr. Relaxationszeit

\Rightarrow Wellenvektor $k \in \mathbb{C}$ (wegen Dämpfung)

Setze $\boxed{k = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} (n + i\gamma)}$ c Vakuumlichtgeschw.
 $\tilde{n} = n + i\gamma$ komplexer Brechungsindex

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \gamma^2 + 2in\gamma) \stackrel{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu (1 + \frac{i}{\omega \tau})$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} n^2 - \gamma^2 &= \epsilon \mu \\ n \gamma &= \frac{\epsilon \mu}{2\omega \tau} \end{aligned} \right\} n, \gamma$$

oBdA: $\underline{k} \parallel x_3$: $\underline{E}(x_3, t) = \underline{E}_0 e^{-\frac{x_3}{d}} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c}x_3)}$

gedämpfte Welle mit Phasengeschw. $\frac{c}{n}$
u. Extinktionskoeff. $d := \frac{c}{\omega \gamma}$

Lineare Polarisation: $\underline{E}_0 \parallel x_1 \Rightarrow \underline{B}_0 \parallel x_2$

$$(\nabla \times \underline{E})_2 = \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = -\dot{B}_2$$

$$\Rightarrow i \frac{\omega}{c} (n + i\gamma) E_1 = i\omega B_2$$

$$\Leftrightarrow B_2 = \frac{n + i\gamma}{c} E_1 = \frac{\sqrt{n^2 + \gamma^2}}{c} e^{i\varphi} E_1$$

Phasenverschiebung φ zwischen \underline{E} u. \underline{B}