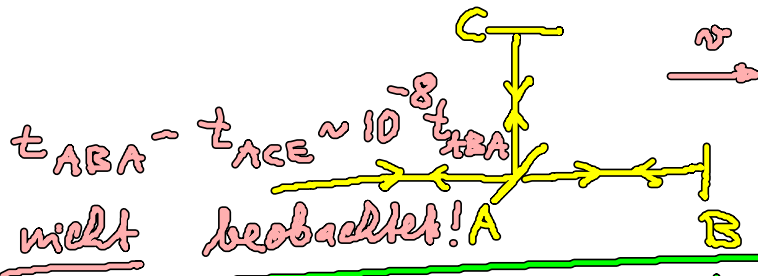


# 6. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

## 6.1 Lorentz-Transformation in der Speziellen Relat.theorie

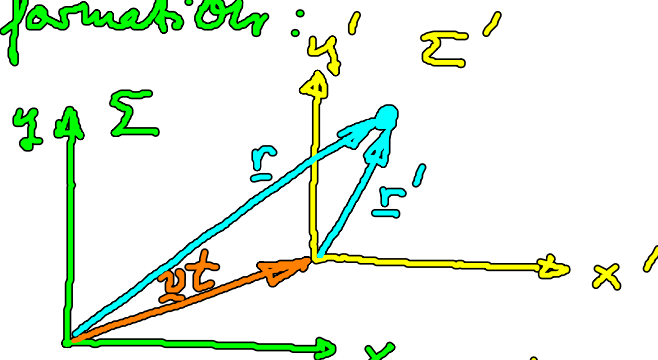
Michelson-Morley-Experiment (1887):

Prüfung der Äther-Hypothese  
(Erde bewegt sich mit Geschw.  $v$  relativ zu einem "Medium", in dem sich das Licht mit  $c$  relativ zum Medium ausbreitet)



Erg. Licht breitet sich in jedem Inertialsystem mit der gleichen Geschwindigkeit aus.

Galilei-Transformation:



Lichtblitz breitet sich vom Ursprung von  $\Sigma$  mit der Geschw.  $c$  aus:  $r = ct$

in  $\Sigma'$ :  $\underline{r}(t) = \underline{r}' + \underline{v}t$

$$c^2 t^2 = r^2 = (\underline{r}' + \underline{v}t)^2 = r'^2 + 2\underline{r}' \cdot \underline{v}t + v^2 t^2$$

$$r'^2 = (c^2 - v^2)t^2 - 2r'vt \neq c^2t^2 \quad \text{für } v \neq 0$$

↳ zum Michelson-Morley-Exp.!

→ Konzept der absoluten Zeit → spez. Rel.theorie

NB: Aufgabe des Konzeptes des abs. Raumes  
→ allg. Rel.th.

Postulat der speziellen Relativitätstheorie:


(Einstein 1905) „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“

Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (Relativitätsprinzip)

Konsequenz: Galilei-Transform. verwerfen!

- Klass. Mechanik ist abzulehnen, da sie Galilei-invariant ist
- El. dynamik hat schon die gewünschte Invarianz (Lorentz-invariant)

Aufgabe: Suche eine Transform.  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  die folgende Forderungen erfüllt:

(i) lineare Transform.  $(r, t) \rightarrow (r', t')$  

(ii) Jeder Pkt.  $r'(t') = \text{const}$  (ruhend in  $\Sigma'$ ) bewegt sich mit  $v$  in  $\Sigma$   
 Jeder Pkt.  $r(t) = \text{const}$  (ruhend in  $\Sigma$ ) bewegt sich mit  $-v$  in  $\Sigma'$

(iii) Die Lichtgeschw.  $c$  ist in beiden Systemen gleich

(iv) Keines der beiden Systeme sei vor dem anderen ausgezeichnet.

$$x \rightarrow x' = f(x, t; v)$$

$$t \rightarrow t' = g(x, t; v)$$

Umkehrtrafo:

$$x' \rightarrow x = f(x', t'; -v)$$

$$t' \rightarrow t = g(x', t'; -v)$$

oBd A:  $v$  in  $x$ -Richtung

$$\bullet (x=0, t=0) \Rightarrow (x'=0, t'=0)$$

$$\bullet y=y', z=z'$$

$$\bullet O' \text{ bewegt sich nach } x=vt$$

Ausatz:  $x \rightarrow x' = \gamma(x - vt)$  (1) wegen (ii), (i)  
 $x' \rightarrow x = \gamma(x' + vt')$  (2) wegen (iv)

Invarianz der Lichtgeschw. (iii):

$$x = ct \rightarrow x' = ct'$$

$$\text{in (1): } ct \rightarrow ct' = \gamma(c-v)t$$

$$\text{in (2): } ct = \gamma(c+v)t'$$

$$\Rightarrow c^2 t t' = \gamma^2 t t' (c^2 - v^2)$$

$$\Rightarrow \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta := \frac{v}{c}$$

$$\text{Für } v=0: \gamma=1$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}$$

Also

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

elim. x

$$\Rightarrow \underline{x' \sqrt{1 - \beta^2}} = x - vt = \underline{\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - vt}$$

$$\begin{aligned} vt &= \sqrt{1 - \beta^2} \left( -x' + \frac{x' + vt'}{1 - \beta^2} \right) \\ &= \sqrt{1 - \beta^2} \left( \frac{-x' + x' + vt'}{1 - \beta^2} \right) \\ &= \frac{x' \beta^2 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

$$t = \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

analog  $t' = \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Erg.: Lorentz-Transform

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Zeit wird mittransportiert! Keine abs. Zeit!

Forderung  $1 - \frac{v^2}{c^2} \geq 0$

, sonst imaginäre, d.h. unphys. Werte

$$\Rightarrow \boxed{|v| \leq c}$$

Entwicklung für  $|v| \ll c$ :

$$\beta \ll 1 \Rightarrow \gamma \rightarrow 1 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x' = x - vt \\ t' = t \end{matrix}} \quad \text{Galilei-Transform}$$

Nichtrelativist. Mechanik gültig

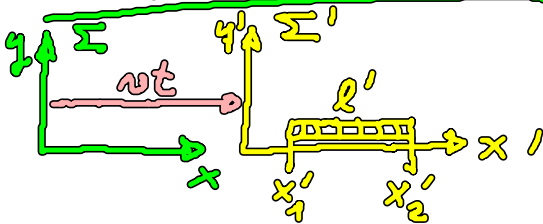
## Eigenschaften der Lorentz-Transfo

### a) Lorentz-Invariante

$$\begin{aligned} \Sigma'^2 - c^2 t'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \\ &= \gamma^2 (x^2 - 2xvt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 \\ &\quad - \gamma^2 c^2 \left( t^2 - \frac{2xvt}{c^2} + \frac{x^2 v^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{x^2 + v^2 t^2}{1 - \beta^2} - \frac{c^2 t^2 + x^2 \beta^2}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2 \\ &= \frac{(x^2 - c^2 t^2)(1 - \beta^2)}{1 - \beta^2} \\ &= x^2 - c^2 t^2 \end{aligned}$$

d.h. Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw.  $c$   
(Lichtblitz in  $\Theta = \Theta'$ ) sind invariant

### b) Lorentz-Kontraktion



Länge in  $\Sigma'$ :  $l' = x'_2 - x'_1$  (Ruhelänge)

$$\begin{aligned} \text{Länge in } \Sigma: l &= x_2 - x_1 \\ &= \frac{1}{\gamma} (x'_2 - x'_1) = \frac{1}{\gamma} l' \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} l'$$

$$< l'$$

$$\begin{aligned} \text{z.B. } v/c = 0,75 &\Rightarrow \gamma \approx 1,5 \\ &\frac{1}{\gamma} \approx 2/3 \end{aligned}$$

Spektrum der Wiss., Juli 2005

Hanns Ruder (Tübinger) = Einsteins Holdeck

→ Visualisierungen