Vierervektoren im Minkowski-Raum

4-Geschwindigkeit $\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}}$ $\quad u^\mu u_\mu = 1$

$$u^0 = \gamma$$
$$u^i = \frac{\gamma}{c} v^i$$

4-Impuls $\boxed{p^\mu := m_0 c\, u^\mu}$ $\quad p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$

$$p^0 = \frac{E}{c} = m(v)\,c$$
$$p^i = m(v)\, v^i \,, \quad m(v) = m_0 \gamma$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2} \quad \Leftrightarrow \quad E = \sqrt{c^2 \underline{p}^2 + (m_0 c^2)^2}$$

nichtrelativist. Grenzfall $|\underline{p}| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\underline{p}^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots\right)$$

$$\approx m_0 c^2 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0} + \dots$$

Ruhe-energie   kinet. Energie

$\underline{p} = 0$: $E = m_0 c^2$

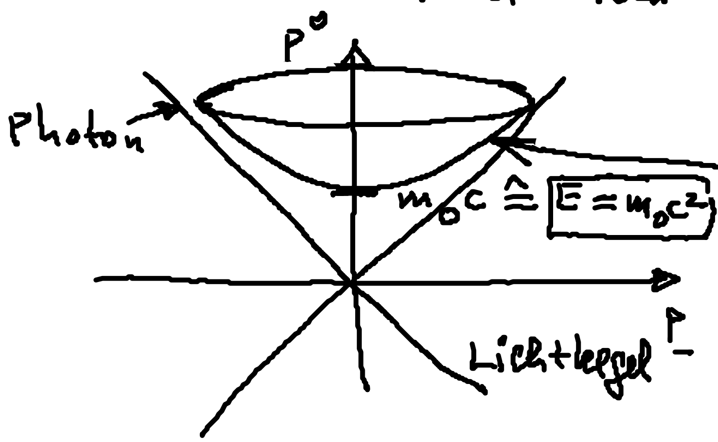
Äquivalenz v. Ruhemasse und Energie

(Anwendung: Zerfall ruhender El. teilchen in Zerfallsprodukte mit kinet. Energie,
z.B. $\pi^+ \to \mu^+ + \nu + E_{kin}^{\nu}$ (ca. 25 % der π^+-Ruheenerg.))

<u>hochrelativist. Grenzfall</u> : $m_0 = 0$ (z.B. Photon)

$E = c|\underline{p}|$ $\quad p^\mu = (|\underline{p}|, \underline{p})$ mit $p^\mu p_\mu = 0$
(lichtartiger Vektor)

$v = c \Rightarrow u^\mu$ nicht mehr definiert, da $\gamma \to \infty$

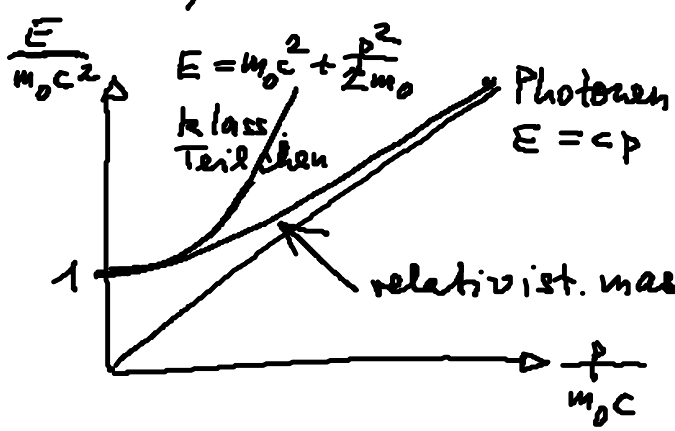


<u>massive Teilchen</u>

p^μ liegt auf der „<u>Massenschale</u>"
(on shell)

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

<u>Hyperboloid</u>
(relativist. Energie-Impuls-Bez.)



Bem.: Welle-Teilchen-Dualismus der Quantentheorie

Photon: $\boxed{E = cp}$

Lichtwelle (Vakuum) $\boxed{\omega = ck}$

ω Kreisfrequenz
k Wellenzahl

$\Big\}$ DeBroglie-Beziehung
$E = \hbar\omega$
$p = \hbar k$

$\hbar$ = Planck'sches Wirkungsquantum

6.4 Transformationsverhalten der Ströme und Felder

Ziel: Ko-/kontravariante Schreibweise der El. dynamik im Vakuum

Grund: Klass. Elektrodynamik ist eine Lorentz-invariante Theorie!

Ladungserhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \partial_i j^i = 0$$

In 4-Schreibweise: $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$ mit $\boxed{j^\mu := (c\rho, \underline{j})}$ 4-Stromdichte

Forderung: Ladungserhaltung soll in allen Inertialsyst. gelten

$\Rightarrow$ j^μ muss sich wie ein 4-Vektor transformieren, damit das Skalarprodukt $\partial_\mu j^\mu$ Lorentz-invariant ist:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x^1\right)$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \qquad x'^1 = \gamma(x^1 - vt)$$

$$x'^2 = x^2$$

$x'^3 = x^3$

Also gilt für Ladungs- u. Stromdichten:

$$j'^0 = \gamma(j^0 - \beta j^1)$$
$$j'^1 = \gamma(j^1 - \beta j^0)$$
$$j'^2 = j^2$$
$$j'^3 = j^3$$

bzw. $\boxed{\begin{aligned} \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} j^1\right) \\ j' &= \gamma(j^1 - v\rho) \end{aligned}}$

$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ transformiert sich bei Lorentz-Trafo kovariant (wie x_μ)

d'Alembert-Op.

$$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} = -\partial_\mu \partial^\mu$$

kontra $\to$ kovariant

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to -\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$$\boxed{\Box = -\partial_\mu \partial^\mu}$$

4-Potenziale

Die Potenziale ϕ, $\underline{A}$ sind (in der Lorenz-Eichung) Lösungen von

$$\Box\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \left(\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}\right) \qquad \partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0$$

$$\Box \underline{A} = -\mu_0 \underline{j} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_\mu \partial^\mu cA^i = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^i \quad (i=1,2,3)$$

Also $\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu}$ mit $\boxed{\begin{array}{l} \phi^0 := \phi \\ \phi^i := cA^i \end{array}}$ $i = 1, 2, 3$

Da j^μ ein 4-Vektor ist, muss sich auch ϕ^ν wie ein 4-Vektor transformieren, da $\partial_\mu \partial^\mu$ Lorentz-invariant ist:

$$\phi'^0 = \gamma(\phi^0 - \beta\phi^1)$$
$$\phi'^1 = \gamma(\phi^1 - \beta\phi^0)$$

bzw. $\boxed{\begin{array}{l} \phi' = \gamma(\phi - vA^1) \\ A'^1 = \gamma\left(A^1 - \frac{v}{c^2}\phi\right) \end{array}}$

$$A'^2 = A^2$$
$$A'^3 = A^3$$

Lorenz-Eichung

$$\underline{\nabla} \cdot \underset{\sim}{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0 \iff \boxed{\partial_\mu \phi^\mu = 0}$$ Lorentz-invariant!

Lorenz-Eichung ist Lorentz-invariant (im Gegensatz zur Coulomb-Eichung!)

Umeichung

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\tilde{A}} = \underline{A} + \underline{\nabla} F \\ \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial}{\partial t} F \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} c\tilde{A}^i = cA^i + \partial_i cF = cA^i - \partial^i cF \\ \tilde{\phi}^0 = \phi^0 - \partial_0 cF = \phi^0 - \partial^0 cF \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\phi}^\mu = \phi^\mu + \partial^\mu \varphi}$$ mit bel. Lorentz-invarianten skalaren Fkt. $\varphi(x^\mu)$