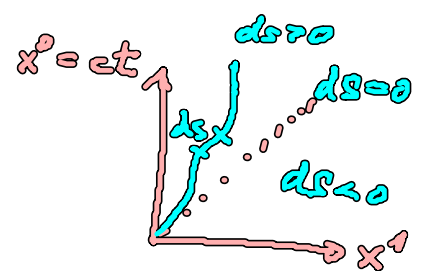


Vierervektoren im Minkowski-Raum



4-Geschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} \quad u^\mu u_\mu = 1$$

$$u^0 = \gamma$$
$$u^i = \frac{\gamma}{c} v^i$$

4-Impuls

$$p^\mu := m_0 c u^\mu \quad p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$$

$$p^0 = \frac{E}{c} = m(v)c$$

$$p^i = m(v)v^i, \quad m(v) = m_0 \gamma$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2} \quad \Leftrightarrow E = \sqrt{c^2 \underline{p}^2 + (m_0 c^2)^2}$$

nichtrelativist. Grenzfall $|\underline{p}| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\underline{p}^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{\underline{p}^2}{2m_0^2 c^2} + \dots \right)$$

$$\approx m_0 c^2 + \frac{\underline{p}^2}{2m_0} + \dots$$

 Ruhe-
 energie kinet.
 Energie

$$p=0 : E = m_0 c^2$$

Äquivalenz v.
Ruhemasse
und Energie

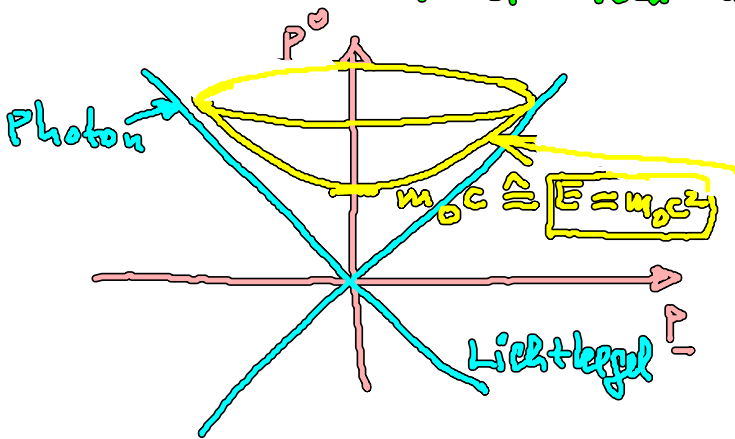
(Anwendung: Zerfall ruhender
El. Teilchen in Zerfallsprodukte
mit kinet. Energie
z.B. $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu + E_{kin}^{\nu}$ (ca. 25% der
 π^+ -Ruhemass.)

hochrelativist. Grenzfall : $m_0=0$ (z.B. Photon)

$$E = c|p| \quad p^\mu = (|p|, \underline{p}) \quad \text{mit } p^\mu p_\mu = 0$$

(lichtartiger Vektor)

$v=c \Rightarrow u^\mu$ nicht mehr definiert, da $\gamma \rightarrow \infty$



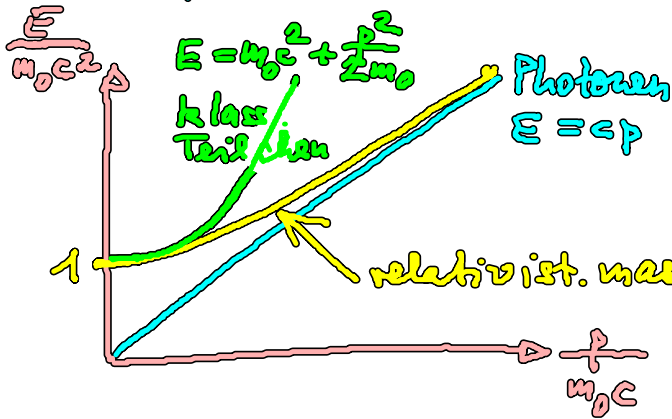
massive Teilchen

p^μ liegt auf der „Massenschale“
(on shell)

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \underline{p}^2 = (m_0 c)^2$$

Hyperboloid

(relativist. Energie-Impuls-Bez.)



relativist. massive Teilchen $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$

Bem. : Welle-Teilchen-Dualismus der Quantentheorie

Photon :	$E = cp$	} DeBroglie-Beziehung
Lichtwelle (Vakuum)	$\omega = ck$	

ω Kreisfrequenz
 k Wellenzahl

$h = \text{Planck'sches Wirkungsquantum}$

$E = h\omega$
 $p = h k$

6.4 Transformationsverhalten der Ströme und Felder

Ziel : Ko-/kontravariante Schreibweise der El. dynamik im Vakuum

Grund : Klass. Elektrodynamik ist eine Lorentz-invariante Theorie!

Ladungserhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \partial_i j^i = 0$$

In 4-Schreibweise : $\partial_\mu j^\mu = 0$ mit $j^\mu = (\rho, \underline{j})$

Forderung : Ladungserhaltung soll in allen Inertialsyst. gelten

$\Rightarrow j^\mu$ muss sich wie ein 4-Vektor transformieren, damit das Skalarprodukt $\partial_\mu j^\mu$ Lorentz-invariant ist :

$$x'^0 = \gamma (x^0 - \beta x^1)$$

$$x'^1 = \gamma (x^1 - \beta x^0)$$

$$x'^2 = x^2$$

$$t' = \gamma (t - \frac{v}{c^2} x^1)$$

$$x'^1 = \gamma (x^1 - vt)$$

$$x^{13} = x^3$$

Also gilt für Ladungs- u. Stromdichten:

$$j^{10} = \gamma (j^0 - \beta j^1)$$

$$j^{11} = \gamma (j^1 - \beta j^0)$$

$$j^{12} = j^2$$

$$j^{13} = j^3$$

bzw.

$$j^0 = \gamma (j^0 - \frac{v}{c} j^1)$$

$$j^1 = \gamma (j^1 - v j^0)$$

$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ transformiert sich bei Lorentz-Transform. kovariant (wie x_μ)

d'Alambert-Op.

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = - \partial_\mu \partial^\mu$$

$$\square = - \partial_\mu \partial^\mu$$

$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow - \frac{\partial}{\partial x^\mu}$
 kontrav. \rightarrow kovariant

4 - Potenziale

Die Potenziale ϕ , \underline{A} sind (in der Lorenz-Eichung) Lösungen von

$$\square \phi = - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c})$$

$$\square \underline{A} = - \mu_0 \underline{j}$$

\Leftrightarrow

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu c A^i = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^i \quad (i=1,2,3)$$

Also

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^\nu = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^\nu$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \phi^0 &:= \phi \\ \phi^i &:= c A^i \end{aligned} \right\} i=1,2,3$$

Da j^μ ein 4-Vektor ist, muss sich auch ϕ^ν wie ein 4-Vektor transformieren, da $\partial_\mu \partial^\mu$ Lorentz-invariant ist:

$$\phi'^0 = \gamma(\phi^0 - \beta \phi^1)$$

$$\phi'^1 = \gamma(\phi^1 - \beta \phi^0)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi' &= \gamma(\phi - v A^1) \\ A'^1 &= \gamma(A^1 - \frac{v}{c^2} \phi) \end{aligned} \right\}$$

$$A'^2 = A^2$$

$$A'^3 = A^3$$

Lorenz-Eichung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

\Leftrightarrow

$$\partial_\mu \phi^\mu = 0$$

Lorentz-invariant!

Lorenz-Eichung ist Lorentz-invariant

(im Gegensatz zur Coulomb-Eichung!)

Umrechnung

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{A} + \underline{\nabla} F$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial}{\partial t} F$$

\Leftrightarrow

$$c \tilde{A}^i = c A^i + \partial_i c F = c A^i - \partial_i c F$$

$$\tilde{\phi}^0 = \phi^0 - \partial_0 c F = \phi^0 - \partial_0 c F$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\phi}^\mu = \phi^\mu + \partial^\mu \varphi}$$

mit bel. Lorentz-invarianten
skalaren Fkt. $\varphi(x^\mu)$