Inhomogene Maxwell-Gln. (im Vakuum)

(3) $\epsilon_0 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \rho$

$$\Leftrightarrow \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 = \frac{1}{\epsilon_0 c} c\rho$$

$$\Leftrightarrow \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_i F^{i0} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^0} \quad \text{da } \partial_0 F^{00} \equiv 0 \qquad i = 0,1,2,3$$

(4) $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}$

1. Komponente:

$$\partial_2 B^3 - \partial_3 B^2 = \mu_0 j^1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E^1$$

mit $\mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c}$:

$$\Leftrightarrow \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{13} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1 + \partial_0 F^{10}$$

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_i F^{i1} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^1} \quad \text{da } \partial_1 F^{11} = 0$$

analog für 2. und 3. Komp.!

Zusammenfassung der inhomog. Maxwellgln.:

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k} \quad (\text{„}\underline{\text{4-Divergenz}}\text{"})$$

<u>Bem</u>.: (1) Die homog. Maxwell-Gln. sind durch den Potenzialansatz

$$F_{lm} = \partial_l \phi_m - \partial_m \phi_l$$

automatisch erfüllt:

$$\epsilon^{iklm} \partial_k F_{lm} = \underbrace{\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_l \phi_m}_{\overset{!}{=}0} - \underbrace{\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_m \phi_l}_{\overset{!}{=}0} = 0$$

infolge der Antisymm. von ϵ^{iklm} $(k \leftrightarrow l)$

$$\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_l \phi_m = -\epsilon^{iklm} \partial_k \partial_l \phi_m$$

(ii) Aus den inhomog. Maxwell-Gln.

$$\partial_i F^{ik} = \partial_i \partial^i \phi^k - \partial_i \partial^k \phi^i = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \qquad k = 0,1,2,3$$

folgt mit der Lorenz-Eichung $\partial_i \phi^i = 0$

$$\partial_i \partial^k \phi^i = \partial^k \partial_i \phi^i = 0$$

Also

$$\partial_i \partial^i \phi^k = \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \qquad \text{inhomog. Wellengl.}$$

(iii) Die Maxwell-Gln.

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon^{iklm} \partial_k F_{lm} &= 0 \\ \partial_i F^{ik} &= \frac{1}{\epsilon_0 c} j^k \end{aligned}}$$

sind Lorentz-kovariant, weil sie durch 4-Vektoren ausgedrückt sind.

6.3 Relativistisches Hamilton-Prinzip

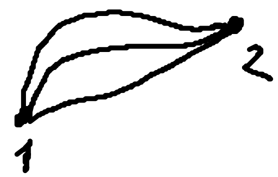
Ziel: Formulierung der Elektrodynamik als Lagrange'sche Feldtheorie

Die relativist. Dynamik eines freien Massenpunktes läßt sich aus dem Extremalprinzip

$$\delta W = 0 \,, \qquad W \sim \int_1^2 ds \qquad (\text{Wirkungsintegral})$$

$ds = \frac{c}{\gamma}\,dt$ lorentzinvariant

herleiten, wobei 1 und 2 Anfangs- und End-Ereignis im 4-Raum sind und $\delta x^i \big|_{1,2} = 0$



Newton'sche Mechanik ist Grenzfall für $\beta \ll 1$:

$$\Rightarrow \quad W = -m_0 c \int_1^2 ds = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} (1-\beta^2)^{1/2}\, dt$$

$$\approx \int \underbrace{\left(-m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v^2\right)}_{L} dt$$

WW eines Massenpunktes mit einem 4-Vektor-Feld $\varphi^i(x^j)$

$$\Rightarrow \quad W = \int_1^2 \Big\{ \underbrace{-m_0 c\, ds}_{} - \underbrace{\varphi^i dx_i}_{} \Big\}$$

Lorentz-Invarianten

Variation:

$$\delta W = \int_1^2 \left\{ -m_0 c\, \delta(ds) - \delta(\varphi^i dx_i) \right\}$$

$$\text{mit} \quad \delta\, ds = \delta\,(dx^i dx_i)^{1/2} = \frac{1}{2}\, \frac{(d\,\delta x^i) dx_i + dx^i (d\,\delta x_i)}{ds}$$

$$(d\delta x^i)\, dx_i = dx^i\, (d\delta x_i)$$

$$= \frac{dx^i}{ds}\, d(\delta x_i) = u^i\, d(\delta x_i)$$

und $\delta(\varphi^i dx_i) = \delta\varphi^i dx_i + \varphi^i d(\delta x_i)$

$$\Rightarrow \delta W = \int_1^2 \left\{-m_0 c\, u^i\, d(\delta x_i) - \delta\varphi^i dx_i - \varphi^i d(\delta x_i)\right\} \quad (*)$$

Part. Integr. $\underbrace{\underbrace{\left[-m_0 c\, u^i \delta x_i\right]_1^2}_{=0 \text{ weil } \delta x_i|_{1,2}=0} + \int_1^2 m_0 c\, du^i \delta x_i}_{\int_1^2 ds\, m_0 c \frac{du^i}{ds} \delta x_i}$ $\qquad$ $\underbrace{-\left[\varphi^i \delta x_i\right]_1^2}_{0} + \int d\varphi^i \delta x_i$

Mit $d\varphi^i = \partial^k \varphi^i dx_k = \partial^k \varphi^i u_k ds$

$$\delta\varphi^i = \partial^k \varphi^i \delta x_k$$

$$\delta\varphi^i dx_i = \partial^k\varphi^i \delta x_k dx_i \overset{i\leftrightarrow k}{=} \partial^i \varphi^k \delta x_i dx_k = \partial^i\varphi^k u_k \delta x_i ds$$

Einsetzen in (*):

$$\delta W = \int_1^2 ds \left\{m_0 c \frac{du^i}{ds} - (\partial^i\varphi^k - \partial^k\varphi^i)\, u_k\right\} \delta x_i$$

Da $\delta W = 0$ für bel. Variation δx_i gilt, folgt:

$$\boxed{m_0 c \frac{du^i}{ds} = f^{ik} u_k} \quad \text{mit} \quad \boxed{f^{ik} := \partial^i \varphi^k - \partial^k \varphi^i},$$

relativist. Beweg.gl. eines Massenpktes der Ruhemasse m_0, Ladung q unter dem Einfluss der Lorentzkraft

Setze hierzu $p^i = m_0 c u^i$ 4-Impuls

$$f^{ik} = \frac{q}{c} F^{ik} = \frac{q}{c}(\partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i)$$

$$\varphi^i = \frac{q}{c}\phi^i$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{ik} u_k} \Longleftrightarrow \boxed{\delta W = \delta \int_1^2 \{-m_0 c\, ds - \frac{q}{c}\phi^i dx_i\} = 0}$$

$$L_{\text{Feld-Mat}}\, dt = (-q\phi - q\underline{v}\cdot\underline{A})\,dt$$
$$= -\frac{q}{c}\phi^i dx_i$$

Die Ortskomp. $\alpha = 1,2,3$ stimmen mit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{p} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})}$$

überein, denn mit $u^0 = \gamma$, $u^\alpha = \frac{\gamma}{c} v^\alpha = -u_\alpha$

$$\frac{d}{dt} p^1 = q(E^1 + v^2 B^3 - v^3 B^2)$$
$$= q\left(F^{10} + F^{21}\frac{1}{c}v^2 - F^{13}\frac{1}{c}v^3\right)$$
$$= \frac{q}{\gamma}\left(F^{10}\gamma - F^{12}\frac{\gamma}{c}v^2 - F^{13}\frac{\gamma}{c}v^3\right)$$
$$= \frac{q}{\gamma}\left(F^{1k}u_k\right)$$

mit $ds = \frac{c}{\gamma} dt$:

$$\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{ik} u_k$$

<u>Newton mit Lorentzkraft</u>

Die zeitartige Komponente $i=0$ gibt $p^0 = \frac{E}{c}$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{E}{c}\right) = \frac{\gamma}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{q}{c}\left(F^{01}u_1 + F^{02}u_2 + F^{03}u_3\right)$$

$$= q\frac{\gamma}{c^2}\left(E^1 v^1 + E^2 v^2 + E^3 v^3\right)$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = q\,\underline{E}\cdot\underline{v}}$$

<u>Leistungsbilanz</u>