

## 6.6 Eichinvarianz und Ladungserhaltung

Wirkungsintegral  $W = \underbrace{-m_0 c \int_1^2 ds}_{W_t} - \underbrace{\frac{q}{c} \int_1^2 dx_i \phi^i}_{W_{t\phi}}$

Verallgemeinerung auf kontinuierliche (Teilchen) (Teilchen-Feld-WW) Massendichte  $\mu(x^i)$ :

$$W_t = -c \int d^3r \mu \int_1^2 ds = - \int_{\Omega} d\Omega \mu \frac{ds}{dt}$$

$d\Omega := d^3r c dt = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  Volumenelement im Minkowski-Raum

- (i)  $d\Omega$  ist eine Lorentz-Invariante, da das Volumen unter orthog. Transf.  $U^i_k$  erhalten wird.
- (ii) Aus  $\underline{dm}_0 dx^i = \frac{m}{c} \frac{dx^i}{dt} \underline{d^3r} c dt = \frac{1}{c} \mu \frac{dx^i}{dt} d\Omega$  folgt, dass 4-Massenstromdichte

$\mu \frac{dx^i}{dt} \equiv g^i$  ein 4-Vektor ist, da  $dm_0, d\Omega$  Lorentz-Skalare (nicht Lorentz-invariant:  $\mu, dt$ )

(iii)  $\underbrace{\mu^2 \frac{dx^i dx_i}{dt^2}}_{g^i g_i} = \left( \mu \frac{ds}{dt} \right)^2$  ist Lorentz-Inv.  
also auch  $\mu \frac{ds}{dt}$

$\Rightarrow W_t$  ist Lorentz-Invariante.

Wkt einer kontinuierlichen Ladungsdichte  $\rho(x^i)$  mit Feld:

$$\begin{aligned} W_{\text{tf}} &= -\frac{1}{c} \int d^3r \rho \int dx_i \phi^i \\ &= -\frac{1}{c^2} \int \underbrace{d^3r \, c \, dt}_{d\Omega} \underbrace{\rho \frac{dx_i}{dt}}_{j_i} \phi^i \end{aligned}$$

mit 4-Ladungsstromdichte  $j_i$   
$$\begin{pmatrix} j^0 := \rho \frac{dx^0}{dt} = c\rho \\ j^\alpha := \rho v^\alpha \quad \alpha=1,2,3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{\text{tf}} = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega j_i \phi^i}$$

Also  $W = \int_{\Omega} d\Omega \mathcal{L}(x^i)$  mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} := -\mu \frac{ds}{dt} - \frac{1}{c^2} j_i \phi^i \quad d\Omega \equiv d^4x$$

Umrechnung

$$\tilde{\phi}^i = \phi^i + \partial^i \varphi$$

$$\tilde{W}_{\text{tf}} = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega j_i \tilde{\phi}^i = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega j_i (\phi^i + \partial^i \varphi)$$

$$\begin{aligned}
&= W_{t_f} - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega \underbrace{j_i \partial^i \varphi}_{\partial^i(\varphi j_i) - \varphi(\partial^i j_i)} \\
&= W_{t_f} - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega \partial^i(\varphi j_i) + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega \varphi(\partial^i j_i) \\
&\quad \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r c \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{c \partial t} (\varphi c j)}_{[\varphi j]_{t_1}^{t_2}} - c \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \nabla \cdot (\varphi \underline{j})}_{\int d^3r \varphi \underline{j} = 0}
\end{aligned}$$

weglassen,  
da Var.  
bei  $t_1, t_2$   
verschwindet

$$\Rightarrow \tilde{W}_{t_f} = W_{t_f} + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} d\Omega \varphi(\partial^i j_i)$$

0 wegen Ladungserhaltung

Fazit: Äquivalenz zwischen Eichinvarianz  $\tilde{W}_{t_f} = W_{t_f}$   
bzw. Lagrange-dichte  $\mathcal{L}$   
und Ladungserhaltung  $\partial^i j_i = 0$

## 6.7. Inhomogene Maxwell-Gleichungen aus dem Wirkungsprinzip

Die Beweg.gl. für ein Teilchen im Feld  $F^{ik}$

$$\frac{d}{ds} p^i = \frac{q}{c} F^{ik} u_k$$

sowie die homogenen Maxwellgl.

$$\epsilon_{iklm} \partial^k F^{lm} = 0 \quad (\text{wegen } F^{lm} = \partial^l \phi^m - \partial^m \phi^l)$$

ergeben sich aus den Wirkungsintegralen

$$W_z + W_{zf} = \int_{\Omega} d\Omega \left\{ \underbrace{-\mu \frac{ds}{dt}}_{\text{Teilchen}} - \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\phi}_i \phi^i}_{\text{Teilchen-Feld-WW}} \right\}$$

durch Var. der Bahn bei geg. Potenzialen  $\phi^i(x^{\dot{t}})$ .

Vermutung:

Erzeugung von Feldern durch Ladungen (d.h., die inhomog. Maxwell-gl. ergeben sich durch

Variation der Felder bzw. Pot. bei geg. Bahnen

Frage: Lagrange-dichte  $L_f$  zur Beschreibung der Dynamik der Felder?

Ansatz:  $W_f = \int_{\Omega} d\Omega L_f(F^{ik}, \phi^i)$

- Forderungen:
- (i) Feldgl. linear  $\Rightarrow L_f$  bilinear in  $F^{ik}, \phi^i$
  - (ii) Eindeutige Determinierung durch  $F^{ik}$   
 $\Rightarrow$  keine Ableitung  $\partial L F^{ik}$
  - (iii) Eichinvarianz  $\Rightarrow \phi^i \phi_i$  darf nicht auftreten
  - (iv) Lorentzinvar.

$$\Rightarrow L_f = -\alpha F^{ik} F_{ik}$$

$$W = \int d\Omega \left\{ \underbrace{-\rho \frac{d\phi}{dt}}_{W_t} - \underbrace{\frac{1}{c^2} \dot{j}_i \phi^i}_{W_{t\phi}} - \underbrace{\alpha F^{ik} F_{ik}}_{W_f} \right\}$$

Variation für feste Bahnen (d.h. festes  $j_i$ ):

$$\delta W = \int d\Omega \left\{ \underbrace{-\frac{1}{c^2} \dot{j}_i \delta\phi^i}_{j^i \delta\phi_i} - \alpha \delta(F^{ik} F_{ik}) \right\}$$

$(\delta F^{ik}) F_{ik} + F^{ik} (\delta F_{ik}) = 2 F^{ik} \delta F_{ik}$   
 $(\delta F_{ik}) F^{ik}$

$$\text{Mit } \delta F_{ik} = \delta(\partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i) = \partial_i \delta\phi_k - \partial_k \delta\phi_i$$

$$2 F^{ik} \delta F_{ik} = \underbrace{2 F^{ik} \partial_i \delta\phi_k}_{2 F^{ki} \partial_k \delta\phi_i} - 2 F^{ik} \partial_k \delta\phi_i = -4 F^{ik} \partial_k \delta\phi_i$$

$$\Rightarrow \delta W = \int d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} \dot{j}_i \delta\phi_i + 4\alpha F^{ik} \partial_k \delta\phi_i \right\}$$

Mit dem verallg. Gauß'schen Satz (in 4 Dim.)

$$\int_{\Omega} d\Omega \partial_k (F^{ik} \delta\phi_i) = \int d\Omega_k F^{ik} \delta\phi_i = 0$$

$\partial\Omega$   
(3-dim. Rand des 4-dim. Vol.)

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \times [t_1, t_2], \quad F^{ik} \rightarrow 0 \text{ as } x^a \rightarrow 0 \text{ (a=0,2,3)}$$

$$\delta\phi_i \Big|_{t_1, t_2} = 0$$

Wird

$$\int d\Omega F^{ik} \partial_k \delta\phi_i = \underbrace{\int d\Omega \partial_k (F^{ik} \delta\phi_i)}_0 - \int d\Omega (\partial_k F^{ik}) \delta\phi_i$$

also

$$\delta W = \int_{\Omega} d\Omega \left\{ -\frac{1}{c^2} \dot{j}^i - 4\alpha (\partial_k F^{ik}) \right\} \delta \phi_i \stackrel{!}{=} 0$$

für bel.  $\delta \phi_i$

$$\Rightarrow \partial_k F^{ik} = -\frac{1}{4\alpha c^2} \dot{j}^i$$

$$\Rightarrow \partial_k F^{ki} = \frac{1}{4\alpha c^2} \dot{j}^i$$

Wahl der Einheiten:  $\alpha = \frac{\epsilon_0}{4c}$  :

$$\boxed{\partial_i F^{ik} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \dot{j}^k} \quad \underline{\text{inhomogene Maxwell-Gln.}}$$

Interpretation der Lagrangedichte der Felder

$$W_f = \int_{\Omega} d\Omega \mathcal{L}_f \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_f = -\frac{\epsilon_0}{4c} F^{ik} F_{ik} = \frac{\epsilon_0}{4c} F^{ik} F_{ki}$$

$$= \frac{1}{2c} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{H}}) \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\neq u = \frac{1}{2} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{H}}) \quad \text{Energiedichte}$$

Analogie:  $q, \dot{q}$   
(harmon. Pot.)  
in der Mech.

$$E = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = T + V$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = T - V$$