2.2 Tensoren 2. Stufe

- Tensoren lineare Abbildungen

  Komponenten: $T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j$

c) Speziell Tensoren:

- transponierter Tensor: $\underline{\underline{T}}^t$:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{b} &= \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}}^t \underline{a} \\ T_{ji} &= (\underline{\underline{T}}^t)_{ij} \end{aligned}} \qquad (2.21)$$

$\xrightarrow[\underline{b} = \underline{e}_i]{\underline{a} = \underline{e}_j}$

- allg. Tensor 2. Stufe (in 3 Dim): $3 \times 3 = 9$ unabh. Komp.

  symmetrischer Tensor:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \xrightarrow{(2.21)} T_{ji} = T_{ij}} \qquad (2.22)$$

6 unabh. Komp. T_{11}, T_{22}, T_{33}
T_{13}, T_{12}, T_{23}

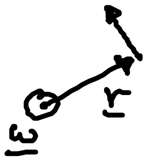
Bsp: Spannungstensor

antisymmetrischer Tensor:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \xrightarrow{(2.21)} T_{ji} = -T_{ij} \\ &\longrightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0 \end{aligned}} \qquad (2.23)$$

... 3 unabh. Komp: T_{12}, T_{13}, T_{23}

Bsp: $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} =: \underline{\underline{\Omega}}\, \underline{r}$ mit $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\, \omega_k$



$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Zerlegung:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_S + \underline{\underline{T}}_A \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^t\right)}_{\text{symmetr.}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^t\right)}_{\text{antisymmetr.}} \end{aligned}}$$

- Einheitstensor: $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

  $[\underline{\underline{1}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}]$

d) <u>Algebra</u>: (wie Matrizen)

- Addition: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
- skalare Multiplikation: $\underline{\underline{C}} = p\,\underline{\underline{A}} \longrightarrow C_{ij} = p\,A_{ij}$, $p \in \mathbb{R}$
- Multiplikation von Tensoren:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

$\underline{\underline{1}}$ einschieben

$$\neq \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$$

(2.25)

- Inverser Tensor: $\underline{\underline{T}}^{-1}$: $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \longrightarrow T_{ik}\left(\underline{\underline{T}}^{-1}\right)_{kj} = \delta_{ij}$
- Spurbildung: $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}} = T_{ii}$

e) <u>Drehungen</u>:

- Drehung der ONB: $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \longrightarrow \{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$

$\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j' = \delta_{ij} \longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{e}_i' &= D_{ij}\,\underline{e}_j \quad (2.26) \\ D_{ij} D_{kj} &= \delta_{ik} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{1}} \quad (2.27) \end{aligned}}$$

- aktiver Standpunkt:

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{gedrehtes}} D\underline{\underline{T}} := T_{kl}\, \underline{e}_k' \otimes \underline{e}_l'$$

$$= T_{kl}\, D_{ki}\, D_{lj}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

gedrehtes $\underline{\underline{T}}$ in ONB $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$$\boxed{\begin{aligned} D\underline{\underline{T}} &= [D\underline{\underline{T}}]_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\ [D\underline{\underline{T}}]_{ij} &= T_{kl}\, D_{ki}\, D_{lj} \\ &= D^t_{ik}\, D^t_{jl}\, T_{kl} \end{aligned}} \quad (2.28)$$

- passiver Standpkt: $\underline{\underline{T}}$ in $\{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$?

also $\underline{\underline{T}} = T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \overset{!}{=} T_{ij}'\, \underline{e}_i' \otimes \underline{e}_j'$

$\longrightarrow$ Trafo von Tensorkomp.:

$$T_{ij}' \overset{(2.16)}{=} \underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j' = \underline{e}_i' \cdot (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\, \underline{e}_j' = T_{kl}\, \underbrace{(\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k)}_{D_{ik}} \underbrace{(\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j')}_{D_{jl}} \quad \xrightarrow{(2.26)}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} T_{ij}' &= D_{ik}\, D_{jl}\, T_{kl} \\ T_{ij} &= D^t_{ik}\, D^t_{jl}\, T_{kl}' \end{aligned}} \quad (2.29)$$

f) Diagonalisierung eines symmetrischen $\underline{\underline{T}}$:

- „Tensor begreifen"

• Eigenwertproblem:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{a}^{(i)} = \lambda^{(i)}\underline{a}} \quad (2.30)$$

Eigen- vektor (EV)   Eigenwert λ

mit
$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{a}^{(i)}\cdot\underline{a}^{(j)} = \delta_{ij}\\ \lambda^{(i)}\in\mathbb{R}\end{array}} \quad (2.31)$$

• Darstellung von $\underline{\underline{T}}$ in Eigenvektor-Basis $\{\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)}\}$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{\underline{T}} = T'_{ij}\,\underline{a}^{(i)}\otimes\underline{a}^{(j)} = \sum_i \lambda^{(i)}\,\underline{a}^{(i)}\otimes\underline{a}^{(i)}\\ T'_{ij} = \lambda^{(i)}\delta_{ij}\,, \quad \underline{\underline{T}}' = \begin{pmatrix}\lambda^{(1)} & & 0\\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)}\end{pmatrix}\end{array}} \quad (2.32)$$

2.3 Vektor-/Tensoranalysis

• Motivation:

i.f. Kontinuumstheorie $\longleftrightarrow$ Felder

(1) Skalarfelder: $f(\underline{r},t)\in\mathbb{R}$ ... Massendichte, Temperatur, Ladungsdichte etc.

(2) Vektorfelder: $\underline{v}(\underline{r},t)\in V_p$ ... Geschwindigkeit, Impuls(dichte), Kraft(dichte) etc.

(3) Tensorfelder $\underline{\underline{T}}(\underline{r},t)\in V_p\times V_p$ ... Spannungstensor, Deformationsrate

Wie verändern sich diese Felder lokal?

a) vollständiges Differential:

• Skalarfeld $f(\underline{r},t)$:
$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i} \quad (2.33)$$

$\{x_1, x_2, x_3\}$ ... beliebige krummlinige Koordinaten

- ebenso:

$$\boxed{\begin{aligned} d\underline{v} &= \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\, dx_i \\ d\underline{\underline{T}} &= \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x_i}\, dx_i \end{aligned}} \qquad (2.34)$$

b) Nabla-Operator:

- Def: Führe „Gradient von f" = grad f als Vektor ein, so daß $df(\underline{r}) = \mathrm{grad}\, f \cdot d\underline{r}$ (2.35)

mit $d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} dx_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| \underline{e}_i\, dx_i$ und $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ (ONB)

folgt:

$$\boxed{\mathrm{grad}\, f = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \underline{e}_i} \qquad (2.36)$$

... Gradient von f

- (2.36) legt nahe für ONB:

Def: Nabla-Operator = Vektor-Differentialoperator

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \in V_p \quad , \quad \nabla_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (2.37)$$

so daß $\mathrm{grad}\, f = \underline{\nabla} f$

- kartesische Koordinaten:

$$\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| = 1 \longrightarrow \boxed{\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{e}_i\, \nabla_i} \qquad (2.38)$$

damit Gradient:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{eines Skalarfeldes } f: & (\underline{\nabla} f)_i = \nabla_i f = f_{,i} \\ \text{" Vektor " } \underline{v}: & (\underline{\nabla} \otimes \underline{v})_{ij} = \nabla_i v_j = v_{j,i} \\ \text{" Tensor " 2.St } \underline{\underline{T}}: & (\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}})_{ijk} = \nabla_i T_{jk} = T_{jk,i} \end{array}} \quad (2.39)$$

NB: Tensorstufe erhöht sich um 1 bei Gradientenbildung!

- Zylinder-, Kugelkoordinaten: $\nabla_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\nabla_i \underline{e}_j \neq 0$

also: Gradient

$$\left.\begin{array}{ll} \text{eines Vektorfeldes:} & (\underline{\nabla} \otimes \underline{v}) = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (v_j \underline{e}_j) \\ & = (\nabla_i v_j)\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + v_j\, \underline{e}_i \otimes (\nabla_i \underline{e}_j) \\ \text{" Tensorfeldes:} & (\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}}) = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (T_{kl}\, \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \end{array}\right\} \quad (2.40)$$

[s. Übungen]

c) Divergenzbildung:

- „Kontraktion über Indexpaar" $\longrightarrow$ Reduktion um 2 Tensorstufen
- Kartesische Koordinaten:

Divergenz eines Vektors $\underline{v}$: $\boxed{\mathrm{div}\, \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \nabla_i v_i = v_{i,i}}$ (2.41)

Tensor 2. Stufe: $\underline{\nabla} \otimes \underline{v} \longrightarrow$ Skalar: $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$

Divergenz eines Tensors 2. St. $\underline{\underline{T}}$:

$$\boxed{(\mathrm{div}\, \underline{\underline{T}})_i = \text{"}(\underline{\nabla}\, \underline{\underline{T}})_i\text{"} = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Konvention!}} = T_{ij,j}} \quad (2.42)$$

$\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}} \longrightarrow$ Vektor $\mathrm{div}\, \underline{\underline{T}}$

- Zylinder-, Kugelkoordinaten: s. Übungen?

3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

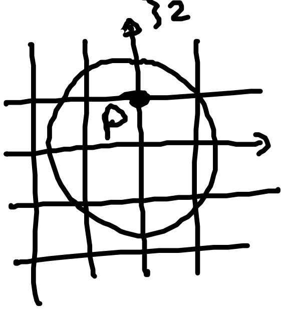
• Ziel: (i) Vollständige Beschreibung der Dynamik zäher Flüssigkeiten

(ii) Beispielhafte Vorgehensweise für Behandlung anderer Kontinua

3.1 Kinematik

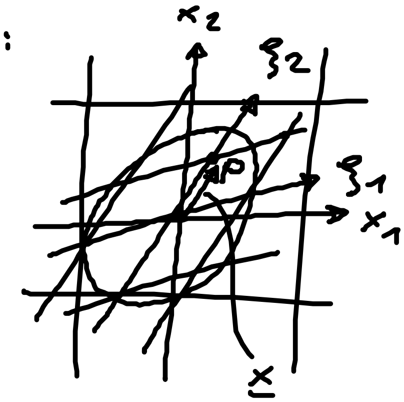
• Ziel: Beschreibung des dynam. Zustandes von Kontinua/Flüssigkeiten: Variablen, Zeitableitung

a) materielle und räumliche Koordinaten:



$$\xrightarrow[\vdots]{\text{Bewegung Deformation}}$$

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$$



Kontinuum im Referenzzustand

Bsp: undeformierter elastischer Körper

$\underline{\xi}$ ... materielle oder Lagrangesche Koordinaten, indiziert Punkt $P = P(\underline{\xi})$ des Kontinuums

Ortsvektor $\underline{x}$ bzw. x_1, x_2, x_3 ... räumliche oder Eulersche Koordinaten von P bzgl. festes räumliches KOS