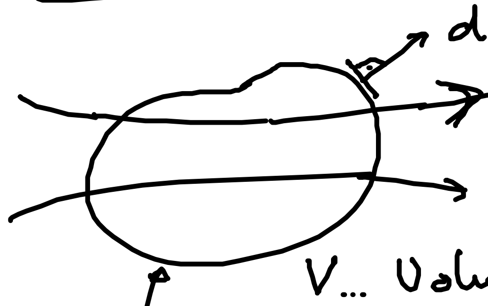
3.3 Massenbilanz

- Kontinuum:



$d\underline{f} = df\,\underline{n}$ ... Oberflächenelement

[$\underline{n}$ ... Oberflächennormale mit $|\underline{n}| = 1$]

V ... Volumen (fest im Raum)

∂V ... Oberfläche

- Gesamtmasse:

$$M(t) = \int_V \varrho(\underline{x},t)\, d^3x$$

ϱ ... Massendichte

- Massenerhaltung:

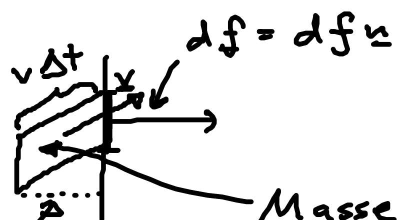
$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\varrho(\underline{x},t)\, d^3x = -\underbrace{\int_{\partial V} \underline{j}(\underline{x},t)\cdot d\underline{f}}_{\text{Masse, die durch die Oberfläche rausfließt pro Zeiteinheit}} \overset{\text{Gauss}}{=} -\int \operatorname{div}\underline{j}\, d^3x$$

V beliebig $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\underline{j} = 0}$ (3.15a)

... Kontinuitätsgleichung
Erhaltungssatz für Masse

mit $\boxed{\begin{array}{l}\underline{j} = \varrho\underline{v} \quad \text{... Massenstromdichte} \\ \quad = \text{Dichte Erhaltungsgröße} \times \text{Geschw.}\end{array}}$ (3.15b)

„Beweis":



$\underline{v}\Delta t\cdot\underline{n}$

Masse durch Fläche df in Zeit Δt

$$\varrho\,\Delta V = \varrho\ \underline{v}\Delta t\cdot d\underline{f} \longrightarrow \frac{\varrho\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{\varrho\underline{v}}_{\underline{j}}\cdot d\underline{f}$$

- (3.15a).. gültig für <u>alle</u> Erhaltungsgrößen

(3.15b).... "konvektiver" Anteil von $\underline{j}$!

- inkompressible Flüssigkeit: $\frac{d\varrho}{dt} = 0$

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\varrho = \underbrace{\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\varrho\underline{v})}_{=0\ (3.15)} - \varrho\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v} \longrightarrow \boxed{\operatorname{div}\underline{v} = 0}\ (3.16)$$

· Hilfsformel:

Geg:

$$\text{physikal. Größe} = \int_V \rho\,\phi\,d^3x = \int \phi\,\underbrace{dm}_{\text{Masseneelement}}$$

Felder:

$\rho\phi$ ... Volumendichte = Größe pro Volumeneinheit

ϕ ... spezifische Größe = " " Masseneinheit (3.17)

dann gilt: $$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\phi\,\underline{v}) = \rho\frac{d\phi}{dt}$$

Beweis: $$\underbrace{\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}} + \underline{\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}} + \underbrace{\rho\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\phi}_{=\rho\frac{d\phi}{dt}} + \underbrace{\phi\,\operatorname{div}(\rho\underline{v})}_{=0,\,(3.15)}$$ qed

Bsp: (i) Massendichte: $\phi = 1$

(ii) thermodynam. Potentiale:

spezifische innere Energie u

" Entropie s

(iii) Impulsdichte: $\rho\underline{v} \longrightarrow \phi = v_i$ (s. Kap. 3.4)

3.4 Impulsbilanz

· Gesamtimpuls: $$\underline{P}(t) = \int_V \underbrace{\rho(\underline{x},t)\,\underbrace{\underline{v}(\underline{x},t)}_{\text{Geschw. von Vol. element } d^3x}}_{\text{Impulsdichte}}\,d^3x \qquad (3.18)$$

· Newton (2. Axiom) (3.19)

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v})\,d^3x = -\underbrace{\int_{\partial V} \underline{j}^{(p)}\,d\underline{f}}_{\text{Impulsstrom [konvektiver Anteil]}} + \underbrace{\int_V \rho\,\underline{b}\,d^3x}_{\text{Volumen-kräfte}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x},\underline{n},t)\,df}_{\text{Oberflächenkräfte}}$$

a) Impulsstromdichte (konvektiver Anteil)

- $\underline{\underline{j}}^{(p)}$ ... Tensor 2. Stufe! [Strom für Vektor $\rho \underline{v}$]

(3.15b) $\longrightarrow$ $\boxed{j^{(p)}_{ij} = \underbrace{\rho v_i}_{\text{Impulsdichte}} \; v_j}$ (3.19b)

Geschw.

$$\boxed{\underline{\underline{j}}^{(p)} = \rho \underline{v} \otimes \underline{v}}$$

b) Volumenkräfte:

$\rho \underline{b}$ ... Volumenkraftdichte

$\underline{b}$ ... Massenkraftdichte

- Bsp: externe Felder: Gravitation: $\underline{b} = \underline{g}$

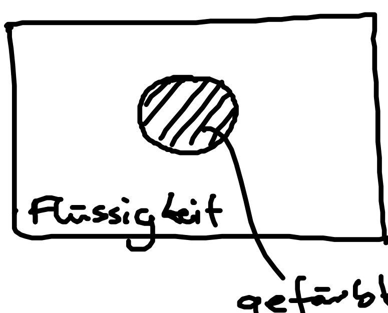
[greifen lokal an d^3x an!] [Gewichtskraft: $\underline{G} = m \underline{g}$

elektr./magnet. Felder

c) Oberflächenkräfte, Spannungstensor:

- Ursprung: kurzreichweitige Ww

Bsp:

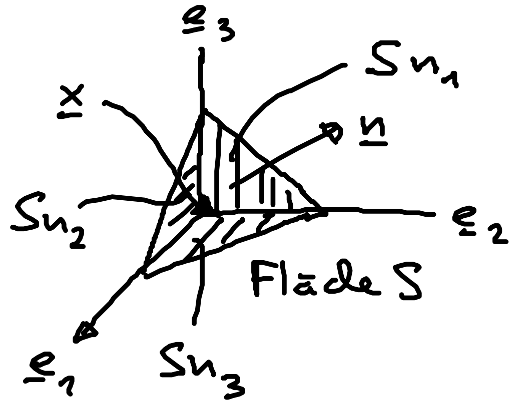


- Druckkräfte
- Reibung zwischen Flüssigkeitsschichten

- Beh: $$\boxed{\begin{aligned} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) &= \underline{\underline{T}}(\underline{x})\, \underline{n} \\ t_i &= T_{ij}\, n_j \end{aligned}}$$ (3.19c)

$\underline{\underline{T}}$ ... Spannungstensor

Bew.:



irregulärer Tetraeder

Volumen: $\frac{1}{3} h S$

Höhe   Grundfläche

Impulsbilanz für $S, h \longrightarrow 0$: $\left[\text{mit } \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div} \underline{\underline{j}}^{(p)} = \rho \frac{d\underline{v}}{dt}\right]$

$$S\left[\underline{t}(\underline{x},\underline{n}) + \left(\sum_{i=1}^{3}\right) n_i \, \underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i)\right] + \frac{1}{3} h S \rho \left(\underline{b} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = 0$$

$$\lim_{h \to 0}(\dots) \longrightarrow \quad \underline{t}(\underline{x},\underline{n}) = -\,\underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i)\, n_i$$

$$\underset{= \text{reactio}}{\overset{\text{actio}}{=}} \underline{t}(\underline{x},\underline{e}_i)\, n_i$$

bzw in Komp.: $$t_i(\underline{x},\underline{n}) = \underbrace{t_i(\underline{x},\underline{e}_j)}_{(3.19c) \to T_{ij}} n_j \qquad \text{qed}$$

• damit: $$\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x},\underline{n})\, df = \int_{\partial V} \underbrace{\underline{\underline{T}}\, d\underline{f}}_{T_{ij}\, df_j} = \int \underbrace{\operatorname{div} \underline{\underline{T}}}_{\partial_j T_{ij}} d^3x \qquad (3.20)$$

• Verdeutlichung:

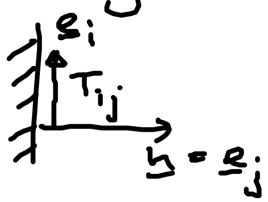
$$\boxed{T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j}$$

... i-te Komponente des Spannungsvektor $\underline{t} = \underline{\underline{T}}\,\underline{n}$ für Normale $\underline{n} = \underline{e}_j$

(1) Normalspannungen: $i = j$

Diagonalelemente: Spannungskräfte $\parallel \underline{n}$

(2) Schubspannungen: $i \neq j$



Nichtdiagonalelemente: Spannungskräfte $\perp \underline{n}$

(3) $\underline{\underline{T}}$ symmetrisch (s.u.) $\longrightarrow$ Diagonalisierung

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{\eta}^{(i)} = \lambda^{(i)}\,\underline{\eta}^{(i)}}$$

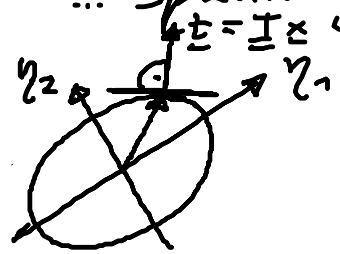
Hauptspannungsrichtung   Hauptspannungen $\parallel \underline{\eta}^{(i)}$

NB: <u>keine</u> Schubspannungen $\perp \underline{\eta}^{(i)}$

· Poinsotsche Konstruktion:

$$\boxed{\underline{x}\cdot\underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \text{konst}}$$

... Spannungsfläche = Bilinearform



$\underline{t} \perp$ Tangentialebene an Spannungsfläche

Beweis: Übungen

d) <u>Impulsbilanz</u>

· Newton (3.19), $\int \underline{j}^{(p)} d\underline{f} = \int \mathrm{div}\, \underbrace{\underline{j}}_{\rho\underline{v}\otimes\underline{v}}{}^{(p)} d^3x$, (3.20) & V beliebig

kanonische Form:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v}) + \mathrm{div}\,(\underbrace{\rho\underline{v}\otimes\underline{v} - \underline{\underline{T}}}_{\text{Impulsstromdichte}}) = \underbrace{\rho\,\underline{b}}_{\text{Quellterm}}} \qquad (3.21)$$

NB: Kontinuitätsgleichung für $\rho\underline{v}$ & Quellterm!