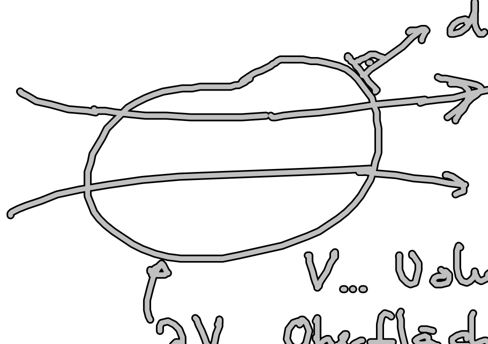
3.3 Massenbilanz

- Kontinuum:



$d\underline{f} = df\,\underline{n}$ ... Oberflächenelement

[$\underline{n}$ ... Oberflächennormale mit $|\underline{n}| = 1$]

V ... Volumen (fest im Raum)

∂V ... Oberfläche

- Gesamtmasse:

$$M(t) = \int_V \rho(\underline{x},t)\, d^3x$$

Massendichte

• Massenerhaltung:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x},t)\, d^3x = -\underbrace{\int_{\partial V} \underline{j}(\underline{x},t)\cdot d\underline{f}}_{\substack{\text{Masse, die durch}\\ \text{die Oberfläche raus-}\\ \text{fließt pro Zeiteinheit}}} \overset{\text{Gauss}}{=} -\int \operatorname{div}\underline{j}\, d^3x$$

V beliebig $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\underline{j} = 0}$ (3.15a)

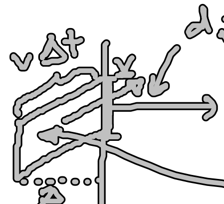
... Kontinuitätsgleichung

Erhaltungssatz für Masse

mit $\boxed{\begin{array}{l} \underline{j} = \rho\underline{v} \quad \text{... Massenstromdichte} \\ \quad = \text{Dichte Erhaltungsgröße} \times \text{Geschw.} \end{array}}$ (3.15b)

• „Beweis":

$d\underline{f} = df\,\underline{n}$



Masse durch Fläche df in Zeit Δt

$$\rho\Delta V = \rho\ \underline{v}\Delta t \cdot d\underline{f} \longrightarrow \frac{\rho\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{\rho\underline{v}}_{\underline{j}} \cdot d\underline{f}$$

$\underline{v}\Delta t \cdot \underline{n}$

• (3.15a)... gültig für alle Erhaltungsgrößen

(3.15b).... „konvektiver" Anteil von $\underline{j}$!

• inkompressible Flüssigkeit: $\frac{d\rho}{dt} = 0$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\rho = \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})}_{=0\ (3.15)} - \rho\underline{\nabla}\cdot\underline{v} \longrightarrow \boxed{\operatorname{div}\underline{v} = 0} \quad (3.16)$$

• Hilfsformel:

Geg: physikal. Größe $= \int_V \rho\,\phi\, d^3x = \int \phi \underbrace{dm}_{\text{Massenelement}}$

Felder:

$\rho\phi$ ... Volumendichte = Größe pro Volumeneinheit

ϕ ... spezifische Größe = " " Masseneinheit (3.17)

dann gilt: $\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\phi\,\underline{v}) = \rho\frac{d\phi}{dt}$

Beweis: $\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\underline{v}\cdot\nabla\phi + \phi\,\mathrm{div}(\rho\underline{v})$

$= \rho\frac{d\phi}{dt}$ qed $\qquad = 0$, (3.15)

Bsp: (i) Massendichte: $\phi = 1$

(ii) thermodynam. Potentiale:

spezifische innere Energie u

" Entropie s

(iii) Impulsdichte: $\rho\underline{v} \longrightarrow \phi = v_i$ (s. Kap. 3.4)

3.4 Impulsbilanz

• Gesamtimpuls: $\underline{P}(t) = \int_V \underbrace{\rho(\underline{x},t)\,\underbrace{\underline{v}(\underline{x},t)}_{\text{Geschw. von Vol.element } d^3x}}_{\text{Impulsdichte}}\, d^3x$ (3.18)

• Newton (2. Axiom) (3.19)

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\underline{v})\,d^3x = -\underbrace{\int_{\partial V} \underline{j}^{(p)}\,df}_{\substack{\text{Impulsstrom}\\ \text{[konvektiver}\\ \text{Anteil]}}} + \underbrace{\int_V \rho\,\underline{b}\,d^3x}_{\substack{\text{Volumen-}\\ \text{kräfte}}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x},\underline{n},t)\,df}_{\text{Oberflächenkräfte}}$$

a) <u>Impulsstromdichte</u> (konvektiver Anteil)

· $\underline{\underline{j}}^{(p)}$ ... Tensor 2. Stufe! [Strom für Vektor $\rho \underline{v}$]

$$(3.15b) \longrightarrow \boxed{j^{(p)}_{ij} = \underbrace{\rho v_i}_{\text{Impulsdichte}} \underbrace{v_j}_{\text{Geschw.}}} \quad (3.19b)$$

$$\boxed{\underline{\underline{j}}^{(p)} = \rho\, \underline{v} \otimes \underline{v}}$$

b) <u>Volumenkräfte</u>:

$\rho \underline{b}$ ... Volumenkraftdichte

$\underline{b}$ ... Massenkraftdichte

· <u>Bsp</u>: externe Felder; [greift lokal an d^3x an!]

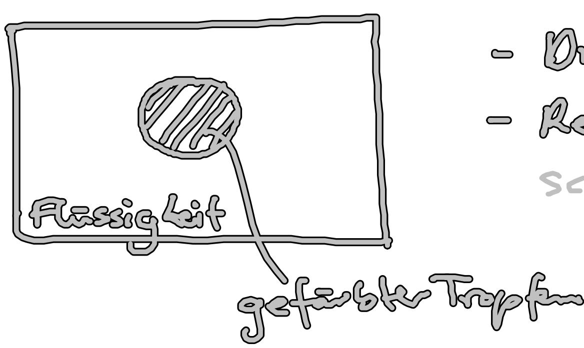
Gravitation: $\underline{b} = \underline{g}$ [Gewichtskraft: $\underline{G} = m \underline{g}$]

elektr./magnet. Felder

c) <u>Oberflächenkräfte</u>, <u>Spannungstensor</u>:

· Ursprung: kurzreichweitige WW

<u>Bsp</u>:



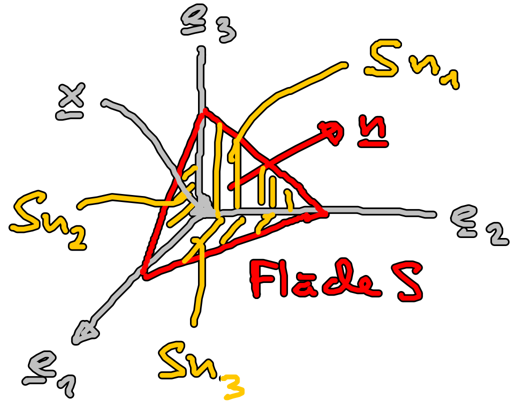
- Druckkräfte
- Reibung zwischen Flüssigkeitsschichten

· <u>Beh</u>:

$$\boxed{\begin{gathered} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{T}}(\underline{x})\, \underline{n} \\ t_i = T_{ij}\, n_j \end{gathered}} \quad (3.19c)$$

$\underline{\underline{T}}$ ... Spannungstensor

Bew:



irregulärer Tetraeder

Volumen: $\frac{1}{3} h S$

Höhe Grundfläche

Impulsbilanz für $S, h \to 0$: $\left[\text{mit } \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \mathrm{div}\, \underline{j}^{(p)} = \rho \frac{d\underline{v}}{dt}\right]$

$$S\left[\underline{t}(\underline{x},\underline{n}) + \left(\sum_{i=1}^{3}\right) n_i\, \underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i)\right] + \frac{1}{3} h S \rho \left(\underline{b} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = 0$$

$$\lim_{h\to 0}(\dots) \longrightarrow \quad \underline{t}(\underline{x},\underline{n}) = -\,\underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i)\, n_i \overset{\text{actio}}{\underset{\text{reactio}}{=}} \underline{t}(\underline{x},\underline{e}_i)\, n_i$$

bzw in Komp:
$$t_i(\underline{x},\underline{n}) = \underbrace{t_i(\underline{x},\underline{e}_j)}_{(3.19c)\to T_{ij}} n_j \qquad \text{qed}$$

- damit:
$$\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x},\underline{n})\, df = \int_{\partial V} \underbrace{\underline{\underline{T}}\, d\underline{f}}_{T_{ij}\, df_j} = \int \underbrace{\mathrm{div}\, \underline{\underline{T}}}_{\partial_j T_{ij}}\, d^3x \qquad (3.20)$$

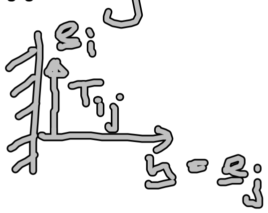
- Verdeutlichung:
$$\boxed{T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j}$$

... i-te Komponente des Spannungsvektors $\underline{t} = \underline{\underline{T}}\,\underline{n}$ für Normale $\underline{n} = \underline{e}_j$

(1) Normalspannungen: $i = j$

Diagonalelemente: Spannungskräfte $\parallel \underline{n}$

(2) Schubspannungen: $i \neq j$



Nichtdiagonalelemente: Spannungskräfte $\perp \underline{n}$

(3) $\underline{\underline{T}}$ symmetrisch (s.u.) $\longrightarrow$ Diagonalisierung

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{n}^{(i)} = \lambda^{(i)}\,\underline{n}^{(i)}}$$

Hauptspannungsrichtung — Hauptspannungen $\parallel \underline{n}^{(i)}$

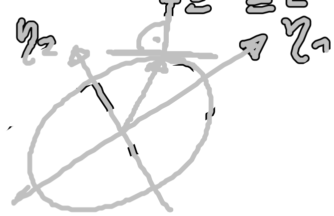
NB: <u>keine</u> Schubspannungen $\perp \underline{n}^{(i)}$

- Poinsotsche Konstruktion:

$$\boxed{\underline{x} \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \text{konst}}$$

... Spannungsfläche = Bilinearform

$\underline{t} = \underline{\underline{T}}\,\underline{x}$



$\underline{t} \perp$ Tangentialebene an Spannungsfläche

Beweis: Übungen

d) Impulsbilanz

- Newton (3.19), $\int \underline{\underline{j}}^{(p)} d\underline{f} = \int \operatorname{div} \underbrace{\underline{\underline{j}}^{(p)}}_{\rho \underline{v} \otimes \underline{v}} d^3x$, (3.20) & V beliebig

kanonische Form:

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div}\underbrace{(\rho \underline{v} \otimes \underline{v} - \underline{\underline{T}})}_{\text{Impulsstromdichte}} = \underbrace{\rho\, \underline{b}}_{\text{Quellterm}}} \qquad (3.21)$$

NB: Kontinuitätsgleichung für $\rho\underline{v}$ & Quellterm!