3.8 Die Newtonsche Flüssigkeit

c) Anwendung auf Newtonsche Flüssigkeit

- Zeitumkehr:

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} T'_{ij} &= \eta_{ijkl} A_{kl} \\ q_i &= -\varkappa_{ij} \nabla_j T \end{aligned}} \quad (3.49)$$

(i) Wärmeleitfähigkeitstensor $\underline{\varkappa}$:

$$\text{Symmetrie} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{\varkappa} &= \varkappa \mathbb{1} \\ \underline{q} &= -\varkappa \underline{\nabla} T \end{aligned}} \quad (3.50)$$

NB: $\boxed{\varkappa \geq 0}$ (3.51)

(ii) Zähigkeitstensor η_{ijkl}: (4. Stufe)

(1) Permutationssymmetrie:

$$(3.52) \begin{cases} \eta_{ijkl} = \eta_{jikl} = \eta_{ijlk} & , \text{ wegen } T'_{ij} = T'_{ji} \;\&\; A_{kl} = A_{lk} \\ \eta_{ijkl} = \eta_{klij} \end{cases}$$

wegen Dissipationsfunktion

$$\boxed{\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \underline{T}' \underline{A} \\ &= \frac{1}{2} \eta_{ijkl} A_{ij} A_{kl} \end{aligned}} \quad (3.53)$$

$2w$ ... pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Reibungswärme

$$\underline{T}' = \frac{\partial w}{\partial \underline{A}} \quad (3.54)$$

(2) Rotationssymmetrie:

$$\eta_{ijkl} = \eta_{i'j'k'l'} R_{i'i} R_{j'j} R_{k'k} R_{l'l} \quad , \quad \underline{R} \in SO(3) \qquad (3.55)$$

(1) & (2) $\xrightarrow{3.8}$

$$\boxed{\begin{aligned}\eta_{ijkl} &= \eta' \delta_{ij}\delta_{kl} + \eta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ \underline{\underline{T}}' &= 2\eta \underline{\underline{A}} + \eta' \underline{\underline{1}}\, \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}\end{aligned}} \quad (3.56)$$

... $\underline{\underline{T}}'$ für Newtonsche Flüssigkeit

- Umschreibung:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underbrace{\left(\underline{\underline{A}} - \tfrac{1}{3}\underline{\underline{1}}\, \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}\right)}_{\text{Scherung!}} + \left(\eta' + \tfrac{2}{3}\eta\right) \underbrace{\underline{\underline{1}}\, \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}}_{\text{Kompression}}} \quad (3.57)$$

η ... Scherviskosität $\qquad$ $\eta' + \frac{2}{3}\eta$ ... Volumenviskosität

Wähle: $\left.\begin{array}{l}\text{reine Scherung } (\mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}} = 0) \\ \text{reine Kompression } (\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{1}})\end{array}\right\}$ und $T\sigma = \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{T}}' \underline{\underline{A}} \geq 0$

$$\boxed{\eta \geq 0\,, \quad \eta' + \tfrac{2}{3}\eta \geq 0} \quad (3.58)$$

Beweis: Übungen

3.9 Newtonsche Flüssigkeit: Zusammenstellung der Gleichungen

- s. Folie

3.10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

- NS-Gleichungen:

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\underline{v}\right) = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta + \eta')\underline{\nabla}(\mathrm{div}\, \underline{v}) + \rho \underline{b} \qquad (3.67)$$

NB: mit Massebilanz & Materialgesetz $p(\rho)$: $\qquad$ ($T =$ konstant)

4 Gleichungen für $\underline{v}, \varrho$

• Verhalten unter Zeitumkehr:

$$\left.\begin{array}{l} t \to -t \\ \underline{v} \to -\underline{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \eta \nabla^2 \underline{v} \to -\eta \nabla^2 \underline{v}$$

bricht Zeitumkehrinvarianz

also: „Dissipation" von Energie ⟷ Irreversibilität

• Nichtlinearität: $\underline{v}\cdot\nabla\underline{v} \longrightarrow$ Turbulenz

• ideale Flüssigkeit: $\eta = \eta' = 0 \longrightarrow$ Eulergleichungen

Anwendung: Dynamik von Gasen

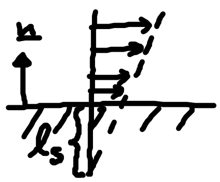
• Flüssigkeiten: div $\underline{v} \approx 0$ (in guter Näherung inkompressibel)

• Randbedingungen:

(i) haftend: $\boxed{\underline{v}\big|_{Rand} = 0}$ (3.63)

„glatte", „homogene" Oberflächen

(ii) mit "Slip"-Länge l_s:



$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Normalgeschw: } v_n = 0 \\ \text{Tangentialgeschw: } \left(\underline{v}_t - l_s \underline{n}\cdot\nabla \underline{v}_t\right)\big|_{Rand} = 0 \end{array}} \quad (3.64)$$

Realisierung: strukturierte Oberflächen (auf Nanometerskala)

– mit Polymeren beschichtet

Nadeln "

[Choi, Kim PRL 96, 06601 (2006)
Silikonnadeln auf Silikonfläche] s. Folie

– chemisch strukturiert ⟶ Muster

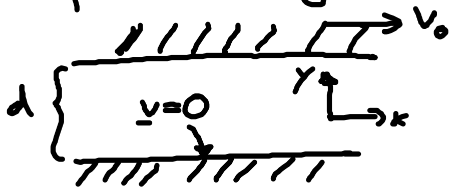
von der Seite:

– Rauhigkeit

⟶ $l_s = \ldots 100\,\text{nm} \ldots 50\,\mu\text{m}$

wichtig für: Mikro-/Nanofluidik
Biologie
porösen Medien

- einfache Schergeometrie: **Couette Strömung** = Strömung, erzeugt durch bewegte Berandung



$\underline{b}=0$, $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ [$v_0=0 \to$ kein Fluß]

Annahme: $\underline{v} = v(y)\,\underline{e}_x$

$\longrightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}=0$, $\underline{v}\cdot\nabla\underline{v}=0$ & $\operatorname{div}\underline{v}=0 \xrightarrow{(3.62)} \eta\underline{\nabla}^2\underline{v}=0$

$\longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y)=0 \longrightarrow \boxed{v(y)=v_0\frac{y}{d}}$ (3.65)

Spannungstensor: $\underline{\underline{T}} = 2\eta\underline{\underline{A}}$

$\longrightarrow$ Kraft pro Flächeneinheit: $\boxed{T_{xy} = \eta\frac{\partial v_y}{\partial y} = \eta\frac{v_0}{d}}$ (3.66)

Kraftrichtung

Flächennormale

... Meßvorschrift für Scherviskosität η!

- Poiseuille-Strömung: s. Übungen
- Viskositäten η, η': Einheit: $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}\cdot\frac{\text{Länge}}{\text{Geschw.}} = \text{Pa}\cdot\text{s} = \frac{\text{N s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$

$= 10\,\frac{\text{g}}{\text{cm s}} = 10$ P(oise)

Werte für η: s. Folie