

3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

a) Wirbel

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho_0} \nabla^2 \right) \text{rot } \underline{v} = \text{rot } \underline{b} \right] \quad (3.72)$$

Grenze Fkt: $\text{rot } \underline{b} = \delta(x-x_0) \delta(t) \hat{y}$

$$\rightarrow \left[G(x-x_0, t) = \frac{\hat{y}}{(4\pi \frac{\nu}{\rho_0} t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\nu/\rho_0 t}} \right] \quad (3.73)$$

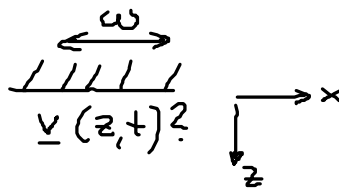
hydrodynam. Zeitskala: $\tau_H = \frac{l_H^2}{6\nu/\rho_0} \quad (3.76)$

• planare Geometrie (1):

$$\left[\text{rot } \underline{b} = \delta(z-z_0) \delta(t) \hat{y} \leftrightarrow G(z-z_0, t) = \frac{\hat{y}}{\sqrt{4\pi \frac{\nu}{\rho_0} t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\nu/\rho_0 t}} \right] \quad (3.77)$$

• planare Geometrie (2):

$\underline{v} = v(z, t) \underline{e}_x$ $[\text{div } \underline{v} = 0!]$
 $\underline{b} = 0, p = \text{konstant}$



in (3.52): $\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v(z, t) = 0 \right] \quad (3.78)$

Ansatz: $v(z, t) = v(\omega, z) e^{i\omega t}$ in (3.78)

$$\rightarrow \left(i\omega - \frac{\nu}{s_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v(\omega, z) = 0 \quad (3.79)$$

$$\rightarrow v(\omega, z) = v(\omega, 0) e^{-\sqrt{i\omega \frac{s_0}{\nu}} z}$$

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \rightarrow v(\omega, z) = v(\omega, 0) e^{-\frac{(1+i)z}{s}} \quad (3.80)$$

exp. Abfall Oszillation

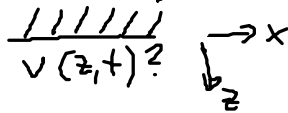
Eindringtiefe der Oszillation:
$$s = \sqrt{\frac{2\nu^2}{i\omega s_0}} \quad (3.81)$$

$$s \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0$$

$$s \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$$

planare Geometrie (3): $v_0, t > 0$

$$v = v(z, t) \mathbf{e}_x$$



Randbed:

$$(1) v(0, t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ v_0, & t > 0 \end{cases}$$

$$(2) v(z, 0) = 0, \quad z > 0$$

Lsg: Superpositionsprinzip!

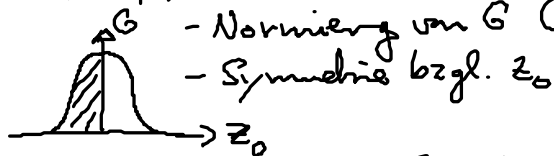
$$v(z, t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \underbrace{2\Theta(-z_0)}_{\text{Stufenfunktion}} G(z-z_0, t) \quad (3.82)$$

Lsg. von (3.78) für $z \neq z_0$
 \hookrightarrow Stufenfunktion: $\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$

[Überlagerung 2D Punktquellen bei $z_0 < 0$]

denm: erfüllt Randbed.

$$v(0, t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 2\Theta(-z_0) G(-z_0, t) \stackrel{t > 0}{=} v_0 \checkmark$$



- Normierung von G (3.74)
 - Symmetrie bzgl. z_0

$$v(z, 0) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 2\Theta(-z_0) \delta(z-z_0) = v_0 2\Theta(-z) \checkmark$$

$$\text{also: } v(z, t) \stackrel{(3.82)}{=} 2v_0 \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{G(z-z_0, t)}_{= \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{\nu}{s_0} t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/s t}}}$$

$$u = \frac{z - z_0}{\sqrt{4\nu/s_0 t}}$$

$$du = -\frac{dz_0}{\sqrt{4\nu/s_0 t}}$$

$$v(z, t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{\sqrt{4\nu/s_0 t}}}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (3.84)$$

$$(1) z \gg \sqrt{4\nu/s_0 t} : v(z, t) \approx 0$$

$$(2) z \ll \sqrt{4\nu/s_0 t} : v(z, t) = v_0$$

→ v_0 bei z spürbar nach Zeit $\frac{z^2}{4\nu/s_0} \approx \tau_H !!$

→ $\tau > \tau_H$... Gültigkeitsbereich für stationäres Geschw. profil

• hydrodynamische Moden:

Transversalwelle: $\underline{v} = v(z, t) \underline{e}_x$ mit $v(z, t) = v(k, \omega) e^{-\gamma t + ikz} \quad (3.85)$

in (3.78) → $(-\gamma + \frac{\nu}{s_0} k^2) v(k, \omega) = 0$

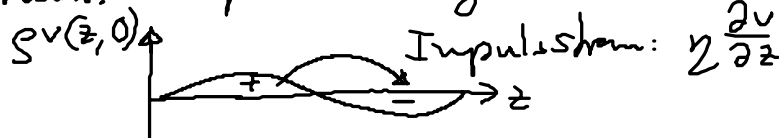
→ $\gamma(k) = \frac{\nu}{s_0} k^2 \quad (3.86)$

... Dispersionsrelation für Schermode
 γ^{-1} ... Relaxationszeit für Welle e^{ikz}

$\gamma \rightarrow 0$ für $k \rightarrow 0!$

„unendliche Lebensdauer“ für hydrodynam. Moden für $k \rightarrow 0$

Grund: Impulserhaltung



b) Quellen:

$\text{div } \underline{v} \neq 0 \rightarrow \underline{v} = v(x, t) \underline{e}_x$... Longitudinalwelle = Schallwellen

Geschw. $c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{-1/2} \approx 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für Flüssigkeit
 isentrope Kompressibilität

also: $1 \mu\text{m}$ in $\frac{1 \mu\text{m}}{c} = 1 \text{ns}$!
 schneller als Scherwelle!

benötigt Masse-/Energiebilanz \rightarrow Kap. 3.13

3.13 Hydrodynamische Moden

• Motivation:

5 Erhaltungssätze (Masse, Impuls, Energie)

\rightarrow 5 hydrodynam. Moden

• Weg: (i) linearisierte Bewegungsgln. (3.15), (3.62), (3.65)
 um homogenen GG-Zustand:

$$\left. \begin{array}{l} \rho \rightarrow \rho + \delta\rho(x,t) \\ v(x,t) \\ T \rightarrow T + \delta T(x,t) \end{array} \right\} (3.87)$$

\uparrow statt innerer Energie!

(ii) homogener GG-Zustand: ρ, T

• erster Satz von Nav. gln.: mit $\underline{b} = 0, v_w = 0$

(3.15) $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho \quad \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (3.88)$

(3.62) $\frac{\underline{v} \cdot \nabla v \dots}{\text{nichtlinear}} \rightarrow \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\nabla p + \gamma \nabla^2 \underline{v} + (\gamma + \gamma') \nabla \operatorname{div} \underline{v} \quad (3.89)$

(3.65) $\frac{\underline{v} \cdot \nabla T}{\text{nichtl.}} \rightarrow \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -p \operatorname{div} \underline{v} + \kappa \nabla^2 T \quad (3.90)$

• Zerlegung:

$$\underline{v}(x,t) = \underbrace{\underline{v}_l(x,t)}_{\text{longitudinaler}} + \underbrace{\underline{v}_t(x,t)}_{\text{transversaler Anteil}} \quad \text{mit } \operatorname{div} \underline{v}_t = 0, \operatorname{rot} \underline{v}_l = 0 \quad (3.91)$$

a) Transversalmoden:

• Gleichung für \underline{v}_t : wegen $\operatorname{rot} \nabla \dots = 0$

$$(3.89) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{S} \nabla^2 \right) v_t = 0 \quad (3.92)$$

Schermoden = s. Kap. 3.12 & keine Kopplung an δg , δT !

$$v_t = v_t(k, \varphi) e^{-\frac{\nu}{S} t + i k \cdot x}$$

$$\text{mit } v_t(k, \varphi) \perp k \iff \text{div } v_t = 0$$

$$[\text{div } v_t(x, t) \sim k \cdot v_t(k, \varphi) = 0!]$$

$$\text{in (3.92)} \rightarrow \boxed{\frac{\nu}{S} (k) = \frac{\nu}{S} k^2} \quad (3.93)$$

... 2 Schermoden für

2 $v_t(k, \omega) \perp k$!

reine diffusive Mode (keine Propagation)