3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

a) Wirbel

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\underline{\nabla}^2\right)\mathrm{rot}\,\underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{b}} \quad (3.72)$$

Greensche Fkt: $\mathrm{rot}\,\underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\delta(t)\,\underline{\hat{\nu}}$

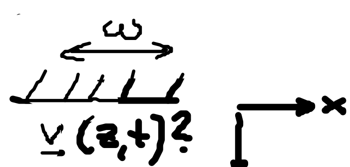
$$\longrightarrow \quad \boxed{G(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \frac{\underline{\hat{\nu}}}{\left(4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t\right)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\eta/\rho_0\, t}}} \quad (3.73)$$

hydrodynam. Zeitskala: $\boxed{\tau_K = \frac{\ell_K^2}{6\eta/\rho_0}}$ (3.76)

- planare Geometrie (1):

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{b} = \delta(z-z_0)\,\delta(t)\,\underline{\hat{\nu}} \longleftrightarrow G(z-z_0,t) = \frac{\underline{\hat{\nu}}}{\sqrt{4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/\rho_0\, t}}} \quad (3.77)$$

- planare Geometrie (2):



$\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x$ $[\mathrm{div}\,\underline{v} = 0!]$

$\underline{b} = 0$, $p = $ konstant

in (3.52): $$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(z,t) = 0} \quad (3.78)$$

Ansatz: $v(z,t) = v(\omega,z)\, e^{i\omega t}$ in (3.78)

$$\longrightarrow \left(i\omega - \frac{\nu}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(\omega,z) = 0 \qquad (3.79)$$

$$\longrightarrow v(\omega,z) = v(\omega,0)\, e^{-\sqrt{\frac{i\omega\rho_0}{\nu}}\, z}$$

$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$$\longrightarrow \boxed{v(\omega,z) = v(\omega,0)\, e^{-(1+i)z/\delta}} \qquad (3.80)$$

exp. Abfall   Oszillation

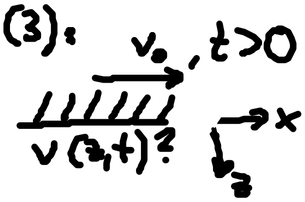
Eindringtiefe der Oszillation: $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega\rho_0}}}$ (3.81)

$\delta \to \infty, \ \omega \to 0$

$\delta \to 0, \ \omega \to \infty$

- planare Geometrie (3):

$\underline{v} = v(z,t)\, e_x$



Randbed.:

(1) $v(0,t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ v_0, & t>0 \end{cases}$

(2) $v(z,0) = 0, \quad z>0$

Lsg: Superpositionsprinzip!   Lsg. von (3.78) für $z \neq z_0$

$$v(z,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\, 2\underbrace{\Theta(-z_0)}\, G(z-z_0,t) \qquad (3.82)$$

$\hookrightarrow$ Stufenfunktion: $\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z>0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$

[Überlagerung 2D Punktquellen bei $z_0<0$]

denn: erfüllt Randbed.

$$v(0,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\, 2\Theta(-z_0)\, G(-z_0,t) \xrightarrow{t>0} v_0 \ \checkmark$$

- Normierung von G (3.74)
- Symmetrie bzgl. z_0

$$v(z,0) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0\, 2\Theta(-z_0)\, \delta(z-z_0) = v_0\, 2\Theta(-z) \ \checkmark$$

also: $$v(z,t) \overset{(3.82)}{=} 2v_0 \int_{-\infty}^{0} \underbrace{G(z-z_0,t)}_{=\frac{1}{\sqrt{4\pi\frac{\nu}{\rho_0}t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\frac{\nu}{\rho_0}t}}} dz_0$$

$$u = \frac{z - z_0}{\sqrt{4\eta/\rho_0\, t}} \qquad du = -\frac{dz_0}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}} \longrightarrow \boxed{v(z,t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{z/\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}^{\infty} e^{-u^2}\, du} \quad (3.84)$$

(1) $z \gg \sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}$: $v(z,t) \approx 0$

(2) $z \ll$ " : $v(z,t) = v_0$

$\longrightarrow$ v_0 bei z spürbar nach Zeit $\frac{z^2}{4\eta/\rho_0} \cong \tau_H$!!

$\longrightarrow$ $\tau > \tau_H$ ... Gültigkeitsbereich für stationäres Geschw.profil

• hydrodynamische Moden:

Transversalwelle: $\underline{v} = v(z,t)\, \underline{e}_x$ mit $v(z,t) = v(k,\omega)\, e^{-\gamma t + ikz}$ (3.85)

$$\xrightarrow{\text{in } (3.78)} \left(-\gamma + \frac{\eta}{\rho_0} k^2\right) v(k,\omega) = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\gamma(k) = \frac{\eta}{\rho_0} k^2} \quad (3.86)$$

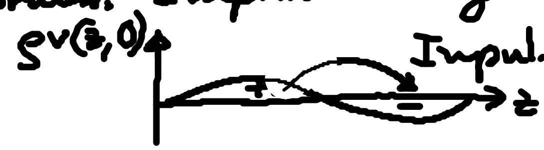
... Dispersionsrelation für Schermode

γ^{-1} ... Relaxationszeit für Welle e^{ikz}

$\gamma \to 0$ für $k \to 0$!

„unendliche Lebensdauer" für hydrodynam. Moden für $k \to 0$

Grund: Impulserhaltung



Impulsstrom: $\eta \frac{\partial v}{\partial z}$

b) Quellen:

$\operatorname{div} \underline{v} \neq 0 \longrightarrow \underline{v} = v(x,t)\, \underline{e}_x$ .... Longitudinalwelle = Schallwellen

Geschw. $c = \Big(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial p}\Big|_s}_{\text{isentrope Kompressibilität}}\Big)^{-1/2} \approx 10^3 \frac{m}{s}$ für Flüssigkeit

also: $1\mu m$ in $\frac{1\mu m}{c} = 1ns$!
schneller als Scherwelle!

benötigt Masse-/Energiebilanz $\longrightarrow$ Kap. 3.13

3.13 Hydrodynamische Moden

- Motivation:
  5 Erhaltungssätze (Masse, Impuls, Energie)
  $\longrightarrow$ 5 hydrodynam. Moden
- Weg: (i) linearisiere Bewegungsgln. (3.15), (3.62), (3,65)
  um homogenen GG-Zustand:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho &\longrightarrow \rho + \delta\rho(\underline{x},t) \\ & \qquad v(\underline{x},t) \\ T &\longrightarrow T + \delta T(\underline{x},t) \end{aligned}} \qquad (3.87)$$

statt innerer Energie!

(ii) homogener GG-Zustand: ρ, T

- erster Satz von Bew.gln.: mit $\underline{b}=0$, $r_w=0$

$$(3.15) \xrightarrow{\rho \to \rho + \delta\rho} \quad \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \qquad (3.88)$$

$$(3.62) \xrightarrow[\text{nichtlinear}]{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\underline{v}\dots} \quad \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta + \eta')\underline{\nabla} \operatorname{div} \underline{v} \qquad (3.89)$$

$$(3.65) \xrightarrow[\text{nichtl.}]{\underline{v}\cdot\underline{\nabla}u} \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -p \operatorname{div} \underline{v} + \varkappa \underline{\nabla}^2 T \qquad (3.90)$$

- Zerlegung:

$$\boxed{\underline{v}(\underline{x},t) = \underline{v}_l(\underline{x},t) + \underline{v}_t(\underline{x},t) \quad \text{mit } \operatorname{div} \underline{v}_t = 0, \ \operatorname{rot} \underline{v}_l = 0} \qquad (3.91)$$

longitudinaler   transversaler Anteil

a) Transversalmoden:

- Gleichung für $\underline{v}_t$: wegen $\operatorname{rot} \underline{\nabla} \dots = 0$

$(3.89) \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{\rho}\nabla^2\right)\underline{v}_t = 0$ (3.92)

- Schermoden: s. Kap. 3.12 & keine Kopplung an $\delta\rho$, δT!

$$\underline{v}_t = \underline{v}_t(\underline{k}, \varsigma)\, e^{-\varsigma t + i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

mit $\underline{v}_t(\underline{k}, \varsigma) \perp \underline{k} \longleftrightarrow \operatorname{div} \underline{v}_t = 0$

$[\operatorname{div} \underline{v}_t(\underline{x}, t) \sim \underline{k}\cdot\underline{v}_t(\underline{k}, \varsigma) = 0!]$

in (3.92) $\longrightarrow$ $\boxed{\varsigma_{1/2}(\underline{k}) = \frac{\nu}{\rho} k^2}$ (3.93)

... 2 Schermoden für
2 $\underline{v}_t(\underline{k}, \omega) \perp \underline{k}$!
<u>reine</u> diffusive Mode (<u>keine</u> Propagation)