3.13 Hydrodynamische Moden

• erster Satz von linearisierten Bew.gln.

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \,\mathrm{div}\,\underline{v} = 0 \qquad (3.88)$$

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} + (\eta+\eta')\underline{\nabla}\,\mathrm{div}\,\underline{v} \qquad (3.89)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -p \,\mathrm{div}\,\underline{v} + \kappa \underline{\nabla}^2 T \qquad (3.90)$$

b) **Longitudinalmoden:**

• wichtige thermodynamische Relationen: s. Folie

• Umformungen für Bewgln.:

(1) in Impulsbilanz: $$\underline{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\underline{\nabla}\delta\rho + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial T}}_{-\rho^2 \frac{\partial s}{\partial \rho}\ (3.99)} \underline{\nabla}\delta T \qquad (3.104)$$

(2) $$\underline{\nabla}^2 \underline{v}_l = \underline{\nabla}\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l - \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{v}_l}_{0} = \underline{\nabla}\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l \qquad (3.105)$$

(3) in Energiebilanz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \rho}}_{\overset{(3.100)}{=}\left(\cancel{\frac{p}{\rho^2}} + T\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho}_{(-\rho)\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial T}}_{=c_v\ (3.95)} \frac{\partial}{\partial t}\delta T + \cancel{\frac{p}{\rho}\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l = -T\rho\frac{\partial s}{\partial \rho}\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l + c_v \frac{\partial}{\partial t}\delta T \qquad (3.106)$$

(3.88) $\longrightarrow$

(3.89) mit (3.104) & (3.105) $\longrightarrow$

(3.90) mit (3.106) $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l = 0 &(3.107)\\ &\frac{\partial \underline{v}_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\underline{\nabla}\delta\rho - \rho\frac{\partial s}{\partial \rho}\underline{\nabla}\delta T - \frac{2\eta+\eta'}{\rho}\underline{\nabla}^2\underline{v}_l = 0 &(3.108)\\ &\frac{\partial}{\partial t}\delta T - \frac{T\rho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial \rho}\,\mathrm{div}\,\underline{v}_l - \frac{\kappa}{\rho c_v}\underline{\nabla}^2\delta T = 0 &(3.109)\end{aligned}}$$

... 3 hydrodynam. Moden aus Kopplung $\delta\rho$, $\underline{v}_l$, δT

• Modenanalyse:
Ansatz: ebene Welle

$$\left.\begin{aligned} \delta\varrho(\underline{x},t) &= \delta\varrho(\underline{k},\xi)\, e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}} \\ \underline{v}_l(\underline{x},t) &= v_l(\underline{k},\xi)\,\frac{\underline{k}}{k}\, e^{-\xi t + i\underline{k}\cdot\underline{x}}\,, \quad \mathrm{rot}\,\underline{v}_l = 0! \\ \delta T(\underline{x},t) &= \delta T(\underline{k},\xi)\, e^{-\,\cdots\cdots} \end{aligned}\right\} \quad (3.110)$$

• mit (3.110) in (3.107 - 3.109):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\xi & ik\varrho & 0 \\ ik\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\varrho} & -\xi + k^2\frac{2\eta+\eta'}{\varrho} & -ik\varrho\frac{\partial s}{\partial\varrho} \\ 0 & -ik\frac{T\varrho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial\varrho} & -\xi + \frac{\kappa}{\varrho c_v}k^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}\text{... dynamische Matrix}} \begin{bmatrix} \delta\varrho(\underline{k},\xi) \\ v_l(\underline{k},\xi) \\ \delta T(\underline{k},\xi) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.111)$$

nichttriviale Lsg: $\boxed{\mathrm{Det}\,\mathcal{D} = 0 \longrightarrow \xi = \xi(k)}$

... Dispersionsrelation

etwas kompliziert ⟶ in Schritten

• ohne Dissipation: $\kappa = \eta = \eta' = 0 \longrightarrow$ keine Dämpfung!

(1) Schallwellen:

$$(3.111) \longrightarrow \left.\begin{aligned} \delta T &= -\frac{ik}{\xi}\frac{T\varrho}{c_v}\frac{\partial s}{\partial\varrho} v_l \\ \delta\varrho &= \frac{ik}{\xi}\varrho v_l \end{aligned}\right\} \text{ in mittlere Gl. von (3.111)}$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} (\underbrace{\xi^2 + c^2k^2}_{=0})\, v_l = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\xi_{3/4} = \pm ick\,, \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial\varrho}\Big|_s} = \frac{1}{\sqrt{\varrho\kappa_s}}} \quad (3.112)$$

- Schallwellen mit Geschw. c: $v_l \propto e^{i(\mp ckt + \underline{k}\cdot\underline{x})}$
  [nach rechts bzw. links laufend] — EV von $\mathcal{D}$
- $c \sim \frac{1}{\sqrt{\kappa_s}}$ mit κ_s... isentrope Kompressibilität

(2) weiterer EV von $\mathcal{D}$:

$$\begin{pmatrix} \delta\varrho \\ 0 \\ \delta T \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in (3.111)}} \boxed{\xi_5 = 0} \quad (3.113)$$

$$\frac{1}{\varrho} ik \Big(\frac{\partial p}{\partial\varrho}\delta\varrho - \underbrace{\varrho^2\frac{\partial s}{\partial\varrho}}_{\overset{(3.99)}{=}\frac{\partial p}{\partial T}}\delta T\Big) \sim dp = 0$$

$\longrightarrow$ statische Mode ($\xi_5 = 0$) mit $dp = 0$

- mit Dissipation:

(2) diffusive Wärmemode:

Ansatz: $\xi_5 = \underbrace{D_T k^2}_{\text{Dämpfg} \sim k^2!}$ in $\operatorname{Det} \underline{\underline{D}} = 0$

& Terme führender Ordnung in k $[O(k^4)]$

$$\xrightarrow{\text{e.B.}} \left(D_T - \frac{\kappa}{\varrho c_p}\right) k^4 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\xi = D_T k^2 \text{ mit } D_T = \frac{\kappa}{\varrho c_p}} \quad (3.114)$$

- rein diffusive Mode für Wärmeausbreitung
  D_T .. Wärmediffusionskoeffizient
- c_p statt c_v durch Kopplung an $\delta\varrho$ bzw div $\underline{v}_L$

(1) propagierende Schallwelle mit Dämpfung:

Ansatz: $\xi_{3/4} = \pm ick + \frac{1}{2}\Gamma k^2$ in $\operatorname{Det} \underline{\underline{D}} = 0$

& Terme führender Ordnung in k $[O(k^4)]$

$$\xrightarrow{\text{e.B.}} \boxed{\begin{aligned} \xi_{3/4} &= \pm ick + \frac{1}{2}\Gamma k^2 \\ \text{mit } c &= \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varrho}\Big|_s} = \frac{1}{\sqrt{\varrho \kappa_s}} \\ \Gamma &= \underbrace{D_T\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)}_{\text{Wärme-diffusion}} + \underbrace{\frac{2\eta + \eta'}{\varrho}}_{\text{Volumen-viskosität}} \end{aligned}}$$

Dämpfung aufgrund

4. Stokes-Gleichungen

- wichtig für Welt der kleinen Reynoldszahlen
  " für Strömungsfelder auf Mikro-/Nanometerskala
  insbesondere Mikro-/Nanofluidik!
- Voraussetzungen:

$$Re = \frac{\varrho a v_0}{\eta} \ll 1 \xrightarrow{(3.68)} \text{vernachlässige } \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$$

$$\longrightarrow \quad \text{"} \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$$

auf Zeiten $t \gg \tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\varrho}$

$\longrightarrow$ stationäres Geschw.feld auf Länge l_H

[s. Kap. 3.11]

div $\underline{v} = 0$ $\longrightarrow$ inkompressible Flüssigkeit

$\longrightarrow$
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{0} &= -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \quad (+\rho \underline{b}) \\ 0 &= \operatorname{div} \underline{v} \end{aligned}} \quad (4.1)$$

... Stokes-Gln.

auch: „creeping-flow" Gleichungen