4.4 Stokes Reibung

a) Translation

- Randbedingungen ...

- **1. Weg:** $$S\,\underline{b}(\underline{x}')\Big|_{\underline{x}'\in\partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2}\,\underline{u}_p \qquad (4.18)$$

$$\longrightarrow \quad \underline{v}(\underline{x}) \underset{(4.6)}{=} \frac{c}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underbrace{\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')}_{\substack{\text{Lsg. der Stokes Glg.}\\ \text{für } \underline{x}-\underline{x}'\neq 0}} \underline{u}_p \, df' \qquad (4.19)$$

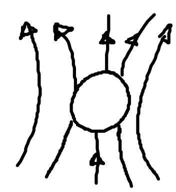
mit $\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') = \underline{\underline{O}}(\underline{x}-(\underline{x}_p+\Delta\underline{x}_p))$
& Hilfssatz (4.5)

$$\underline{v}(\underline{x}) = c\left(1+\frac{1}{6}a^2\nabla_p^2\right)\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underline{u}_p$$

$$\text{RB (4.17)(ii)} \xrightarrow{\text{o.B.}} c = 6\pi\eta a \qquad (4.20)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \underline{\underline{S}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\,\underline{u}_p \\ \text{mit } \underline{\underline{S}}(\underline{x}) &= 6\pi\eta a\left(1+\frac{1}{6}a^2\nabla^2\right)\underline{\underline{O}}(\underline{x}) \\ &\overset{\text{o.B.}}{=} \frac{3}{4}\frac{a}{r}\left(\underline{\underline{1}}+\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(\underline{\underline{1}}-3\frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right) \end{aligned}} \qquad (4.21)$$

NB: für $r \gg a$: $\underline{v}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_p)\underbrace{6\pi\eta a\,\underline{u}_p}_{\underline{F}=-\underline{F}_s!}$ s.u.



!!!

... Stokeslet!

- **2 Weg:** löse (4.1) direkt $\longrightarrow \underline{v}(\underline{x}),\ p(\underline{x})$ [s. Übungen]

· Stokessche Reibungskraft:

1. Weg: $\underline{F}_s = -\int_{\partial V_p} \rho\, \underline{b}(\underline{x})\, df \overset{(4.18)}{=} -c\, \underline{u}_p \underbrace{\int_{\partial V_p} \frac{df}{4\pi a^2}}_{=1}$

actio = reactio

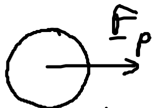
$$\longrightarrow \boxed{\underline{F}_s = -6\pi\eta a\, \underline{u}_p} \quad (4.22)$$

... gültig für $t \gg \tau_H = \frac{a^2}{6\eta/\rho}$

2. Weg: $\underline{v}(\underline{x}),\ p(\underline{x}) \longrightarrow \underline{\underline{T}} = -p\,\underline{\underline{1}} + 2\eta\,\underline{\underline{A}}$

$$\longrightarrow \underline{F}_s = \int_{\partial V_p} \underline{\underline{T}}\, df \qquad \text{[etwas Arbeit]}$$

· Brownsche Zeitskala τ_B:



$\underline{F}_p$, $t \geq 0$

$\underline{u}_p(t=0) = 0$

Bewgl. $m\frac{d\underline{u}_p}{dt} = \underline{F}_p + \underline{F}_s \longrightarrow m\dot{\underline{u}}_p + \gamma\underline{u}_p = \underline{F}_p$ (4.23) $\qquad \gamma = 6\pi\eta a$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\begin{array}{l} \underline{u}_p = \frac{\underline{F}_p}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right) \\ \text{mit } \tau_m = \frac{m}{\gamma} = \frac{2}{9} a^2 \frac{\rho_p}{\rho} \end{array}}$$

$m = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_p$

$\gamma = 6\pi\eta a$

vgl. $\tau_H = \frac{1}{6} a^2 \frac{\rho}{\eta}$

Bsp: $\rho_p = 1000\,\frac{kg}{m^3}$, $a = 1\,\mu m$, $\eta = 10^{-3}\,\frac{kg}{ms} \longrightarrow \tau_m \approx \frac{2}{9}\cdot 10^{-6}\,s$

$\longrightarrow$ Impulsrelaxation vernachlässigbar auf Zeitskala

$$\boxed{\tau_B \gg \tau_H \geq \tau_m} \quad (4.25)$$

dann gilt: $\boxed{\underline{u}_p(t) = \frac{1}{\gamma}\underline{F}_p(t)}$ (4.26)

NB: (4.23) nicht konsistent, weil auf Zeiten $\tau_m = \tau_H$

keine stationäre Strömung existiert $\longrightarrow$ $\gamma_\infty \underline{u}_p$ nicht gültig

$$\longrightarrow \text{besser: } \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\gamma(t-t')}_{\text{Gedächtnisfunktion}} \underline{u}_p(t')\,dt' \;\overset{\text{Kau-}}{\underset{\text{salität}}{=}}\; \int_{-\infty} \underbrace{\gamma(t-t')}_{=0,\; t'>t!} \underline{u}_p(t')\,dt'$$

$$\underset{\text{Faltungssatz}}{\overset{FT}{\Longrightarrow}} \underbrace{\gamma(\omega)}_{\substack{\text{frequenzabhängiger} \\ \text{Reibungskoeffizient}}} \underline{u}_p(\omega) = \underline{F}_p(\omega)$$

$$\underline{u}_p(t) = \underline{u}_p(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow \underline{F}_p(\omega)$$

b) Rotation:

· Randbed.: (i) $\underline{v}(\underline{x}) \longrightarrow 0$, $r \longrightarrow \infty$

(ii) $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p)$, $\underline{x} \in \partial V_p$

· 1. Weg: $\rho \underline{b}(\underline{x})\Big|_{\partial V_p} = \frac{c}{4\pi a^2} \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p)$

⋮ Integral: $\underline{v}(\underline{x}) = \frac{c}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underline{\underline{O}}(\underline{x} - \underline{x}')[\underline{\Omega} \times (\underline{x}' - \underline{x}_p)]$

RB: (ii) $\longrightarrow$ $c = 12\pi\eta a$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \underline{\Omega} \times (\underline{x} - \underline{x}_p) \sim \frac{1}{r^2} \quad , \; r = |\underline{x} - \underline{x}_p|} \quad (4.27)$$

· 2. Weg: s. Übungen

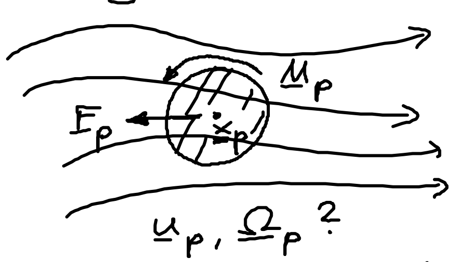
· Stokessches Drehmoment:

$$\underline{M}_s = -\int_{\partial V_p} [(\underline{x} - \underline{x}_p) \times \rho \underline{b}(\underline{x})]\,df$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\underline{M}_s = -8\pi\eta a^3 \underline{\Omega}} \quad (4.28)$$

4.5 Faxén-Theorem

- tiefere Einsicht, nur für kugelförmige Teilchen
- Problemstellung:



$\underline{v}_0(\underline{x})$ ... Lsg. der Stokes Gln. ohne Teilchen!

- Geschw. der Teilchenoberfläche: $\underline{x} \in \partial V_p$

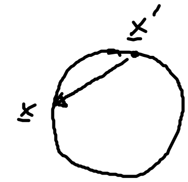
$$\underbrace{\underline{u}_p + \underline{\Omega}_p \times (\underline{x}-\underline{x}_p)}_{(i)} = \underbrace{\underline{v}_0(\underline{x})}_{(iv)} + \underbrace{\int_{\partial V_p} df' \, \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') \, \underbrace{\underline{\rho}^b(\underline{x}')}_{\text{Oberflächenkraftdichte von Teilchen auf Flüssigkeit}}}_{(ii),(iii)} \quad (4.29)$$

o.B.d.A., $\underline{\rho}^b(\underline{x}')$ stellt sich so ein, daß (4.29) gilt

Betrachte: $\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} (4.29)\, df$

$\longrightarrow$ (i) $\int_{\partial V_p} (\underline{x}-\underline{x}_p)\, df = 0!$ (4.30)

(ii) $\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} df \, \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') \underset{\text{Isotropie}}{=} c\, \underline{\underline{1}}$ (4.31) , $\underline{x}, \underline{x}' \in \partial V_p$



$$\xrightarrow[(4.15)]{Sp\,(4.31)} \quad 3c = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{4}{8\pi\eta}\int_{\partial V_p} \frac{df}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \underset{\underline{x}'=z\text{-Achse}}{\overset{\text{Kugel}}{\underset{\text{Koord}}{=}}} \frac{1}{2\pi\eta a}$$

$\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)$

$$\longrightarrow \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} df \, \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') = c\,\underline{\underline{1}} = \frac{\underline{\underline{1}}}{6\pi\eta a} \quad (4.32)$$

(iii) $\frac{1}{6\pi\eta a}\int df' \underline{\rho}^b(\underline{x}') = \frac{1}{6\pi\eta a}\underline{F}_p$ (4.33)

(iv) $\frac{1}{4\pi a^2}\int_{\partial V_p} \underline{v}_0(\underline{x})\, df \underset{(4.5)}{=} \left(1 + \frac{1}{6}a^2 \nabla_p^2\right)\underline{v}_0(\underline{x}_p)$ (4.34)

(i)–(iv) in (4.29)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{u}_p = \frac{1}{6\pi\eta a}\underline{F}_p + \left(1 + \frac{1}{6}a^2\nabla_p^2\right)\underline{v}_0(\underline{x}_p)} \quad (4.35)$$

... Faxén-Theorem für Translation

(i) $\underline{v}_0(\underline{x}) = 0 \longrightarrow$ Stokes (4.22)

$\underline{F}_p = -\underline{F}_s$

(ii) kräftefreies Teilchen:

$F_p = 0 \longrightarrow \quad u_p = \underline{v}_0(\underline{x}_p) + \underbrace{\frac{1}{6} a^2 \underline{\nabla}_p^2 \underline{v}_0(\underline{x}_p)}$!

Spezialfall: $= 0$ für lineares Geschw.profil in einer Schergeometrie

(iii) wichtig für Störungstheorie für HW [s. Kap. 6] !!

- Faxén-Theorem für Rotation: $[\int (\underline{x} \times \underline{x}_p) \times (4.29)\, df \longrightarrow \ldots]$

$$\boxed{\underline{\Omega}_p = \frac{1}{8\pi\eta a^3} \underline{M}_p + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\nabla}_p \times \underline{v}_0(\underline{x}_p)}_{\text{Vortex in Strömung!}}} \quad (4.36)$$

(vgl. Gl. (3.9))