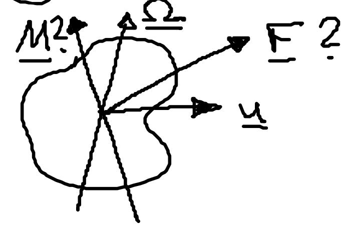
4.6 Hydrodynamische Reibung von Teilchen

- in Kap. 4.4: Stokessche Reibung von Kugeln

a) Teilchen beliebiger Gestalt:

- Fragestellung:



Geg: $\underline{u}, \underline{\Omega} \longrightarrow$ Ges: äußere Kraft $\underline{F}$, Drehmoment $\underline{M}$

- Stokessche Glн. linear in $\underline{v} \longrightarrow$ lineare Beziehung:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\gamma}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{C}}^t & \underline{\underline{\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\Omega} \end{pmatrix}} \quad (4.37)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{\underline{\gamma}}\,\underline{u} + \underline{\underline{C}}\,\underline{\Omega} \\ \underline{M} &= \underline{\underline{C}}^t \underline{u} + \underline{\underline{\beta}}\,\underline{\Omega} \end{aligned}}$$

Bem: (i) $\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{\gamma}} \\ \underline{\underline{\beta}} \end{array}\right\}$ Reibungstensoren für $\left\{\begin{array}{l} \text{Translation} \\ \text{Rotation} \end{array}\right.$

(ii) $\underline{\underline{C}}$ ... Kopplungstensor für Translation und Rotation

(iii) Es gilt: $\boxed{\underline{\underline{\gamma}}^t = \underline{\underline{\gamma}},\ \underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{\beta}}^t,\ \underline{\underline{C}} \text{ und } \underline{\underline{C}}^t}$ (4.38)

$\left[\begin{pmatrix} \underline{\underline{\gamma}} & \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{C}}^t & \underline{\underline{\beta}} \end{pmatrix} \right.$ ist symmetrisch ! $\left.\right]$

Beweis: im Prinzip Onsagersches Reziprozitäts-relation (s. Kap. 3.8 b)
Stokes-Glн: Spezielles Reziprozitätstheorem

(iv) $\underline{\underline{\gamma}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{C}}$ müssen Symmetrie des Teilchens wiederspiegeln

(v) Bsp: Kugel (vgl. Kap. 4.4)

$$\underline{\underline{\gamma}} = 6\pi\eta a \underline{\underline{1}}, \quad \underline{\underline{\beta}} = 8\pi\eta a^3 \underline{\underline{1}}, \quad \underline{\underline{C}} = 0 \quad (4.39)$$

Beweis: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$

(1) $\underline{\underline{C}}$ ... Pseudotensor 2. Stufe

$\hat{=}$ $\underline{\underline{C}} \longrightarrow -\underline{\underline{C}}$ unter Punktspiegelung am Ursprung ($\underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{1}}$)

Grund: polare Vektoren $\underline{F}, \underline{u} \xrightarrow{\underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{1}}} -\underline{F}, -\underline{u}$

$\left.\begin{array}{l}\text{Pseudo}\\ \text{axiale}\end{array}\right\}$ Vektoren $\underline{M}, \underline{\Omega} \xrightarrow{\underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{1}}} \underline{M}, \underline{\Omega}$

[Verdeutlichung: $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} \xrightarrow{\underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{1}}} \underline{M}$]

(2) Symmetriegruppe der Kugel: $O(3)$

$\longrightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$

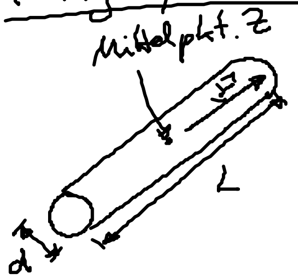
- dissipierte Energie pro Zeiteinheit:

$$\boxed{\begin{aligned} W &= \underline{F} \cdot \underline{u} + \underline{M} \cdot \underline{\Omega} \\ &\overset{(4.37)}{=} \underline{u} \cdot \underline{\underline{\gamma}}\, \underline{u} + \underline{\Omega} \cdot \underline{\underline{\beta}}\, \underline{\Omega} + 2\, \underline{u} \cdot \underline{\underline{C}}\, \underline{\Omega} \end{aligned}} \qquad (4.40)$$

- $\underline{\Omega}, \underline{M}$ relativ zu Pkt. gewählt $\longrightarrow$ führe ein: Reaktionszentrum, so daß $\boxed{\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^t}$ (4.41)

o.B.!

b) langer, dünner Stab:



$\frac{L}{d}$ ... Aspektverhältnis

- Kopplungstensor (für Z = Reaktionszentrum)

$$\underline{\underline{C}} = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{\underline{\gamma}}\, \underline{u} \\ \underline{M} &= \underline{\underline{\beta}}\, \underline{\Omega} \end{aligned}} \qquad (4.42)$$

· Translation:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\underline{\gamma}} = \gamma_\parallel\, \hat{\underline{\nu}} \otimes \hat{\underline{\nu}} + \gamma_\perp \left(\underline{\underline{1}} - \hat{\underline{\nu}} \otimes \hat{\underline{\nu}}\right) \\ &\text{mit } \gamma_\perp \approx \frac{4\pi\eta}{\ln(L/d)}\, L \approx 2\gamma_\parallel \quad , \quad L \gg d \end{aligned}} \qquad (4.43)$$

Bem: (i) Rotationssymmetrie um $\hat{\underline{\nu}}$ $\longrightarrow$ $\underline{\underline{\gamma}} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \gamma_\perp & & 0 \\ 0 & \gamma_\perp & \\ & & \gamma_\parallel \end{pmatrix}$

[formal: C_∞-Achse $\parallel \hat{\underline{\nu}}$]

Matrix-form

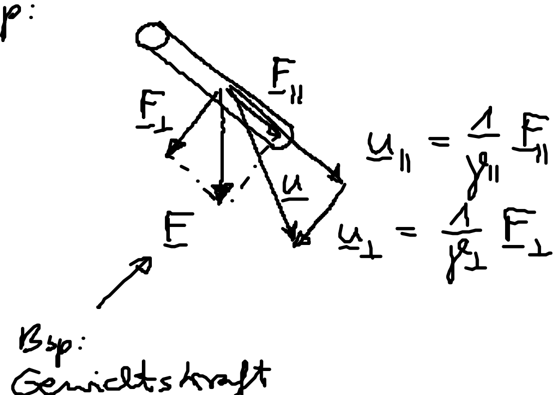
$\hat{\underline{\nu}} \otimes \hat{\underline{\nu}}$ projiziert aus $\underline{u}$ die Komponente $\parallel$ zu $\hat{\underline{\nu}}$

$\underline{\underline{1}} - \hat{\underline{\nu}} \otimes \hat{\underline{\nu}}$ " " $\underline{u}$ " " $\perp$ zu $\hat{\underline{\nu}}$

$\longrightarrow$ 2 Reibungskonstante: $\left.\begin{aligned} \underline{u}_\parallel \parallel \hat{\underline{\nu}} &\longrightarrow \underline{F}_\parallel = \gamma_\parallel\, \underline{u}_\parallel \\ \underline{u}_\perp \perp \hat{\underline{\nu}} &\longrightarrow \underline{F}_\perp = \gamma_\perp\, \underline{u}_\perp \end{aligned}\right\}$ (4.44)

(ii) i.a. $\underline{F} \nparallel \underline{u}$

Bsp:

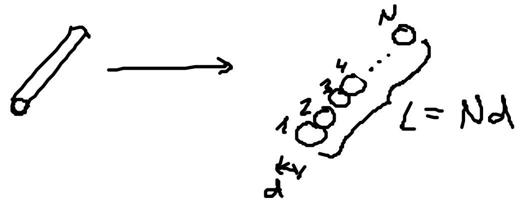


$\longrightarrow$ Driftbewegung $\perp \underline{F}$

(iii) Randeffekte des Stabs $\longrightarrow$ $\gamma_\perp \neq 2\gamma_\parallel$

Bsp: $\gamma_\perp = \frac{3}{2} \gamma_\parallel$ für $\frac{L}{d} \approx 20$

(iv) Beweis von (4.43): s. Übungen?



Jede Kugel → Stokeslet $\underline{v}_j(\underline{x}) = \underline{\underline{O}}(\underline{x} - \underline{x}_j)\frac{\underline{F}}{N}$

Oseen-Tensor

Kraft verteilt sich homogen auf alle Kugeln (Randeffekte vernachlässigt)

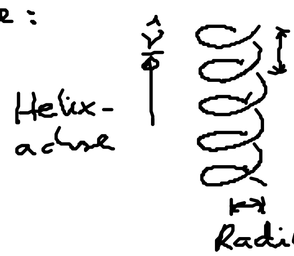
$$\longrightarrow \quad \underline{u} = \underline{u}(\underline{x}_i) = \underbrace{\frac{1}{3\pi\eta d}\frac{\underline{F}}{N}}_{\text{durch Kraft auf Kugel } i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \underline{v}_j(\underline{x}_i)}_{\text{von anderen Kugeln}}$$

- Rotation: (o.B.)

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{M} = \beta\, \underline{\Omega} \perp \hat{\underline{t}} \\ \text{mit } \beta = \dfrac{\pi\eta L^3}{3\ln(L/d)} \end{array}} \qquad (4.45)$$

c) <u>Helix = Schraubenlinie</u>

- Geometrie:



Ganghöhe p → Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{p}$

Ortsvektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ p\,\frac{\varphi}{2\pi} \end{pmatrix}$, $\hat{\underline{t}} \parallel \underline{e}_z$, φ… Azimuthalwinkel

$$\left.\begin{array}{l}\text{Rechtsschraube} \\ \text{rechtshändige Helix}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{spiegelung oder Spiegelbild}]{\text{Punkt-}} \left\{\begin{array}{l}\text{Linksschraube} \\ \text{linkshändige Helix}\end{array}\right.$$

… chirales Objekt

• Beschränkung: $\underline{F}, \underline{M}, \underline{u}, \underline{\Omega} \parallel \hat{\underline{v}}$

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

mit
$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\pi}{\sqrt{R^2 + k^{-2}}} \left(\zeta_\parallel k^{-2} + \zeta_\perp R^2 \right) \\ \beta &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot/\cdot}} R^2 \left(\zeta_\parallel R^2 + \zeta_\perp k^{-2} \right) \\ C &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot/\cdot}} k^{-1} R^2 \left(\zeta_\parallel - \zeta_\perp \right) \end{aligned}\right\} (4.47)$$

für <u>eine</u> Ganghöhe

$\zeta_\parallel, \zeta_\perp$ ... Reibungskoeffizienten pro Längeneinheit $\parallel, \perp$ Helixsegmenten

$\zeta_\perp \approx 2\zeta_\parallel$ [s. 61. (4.43)]

Beweis: s. Übungen??

Betrachte: $\gamma \uparrow u$

$C \uparrow \Omega$

Bestimme F durch Integration von $\underline{f} = [\zeta_\parallel \underline{t} \otimes \underline{t} + \zeta_\perp (\mathbb{1} - \underline{t} \otimes \underline{t})] \underline{v}$ entlang der Schraubenlinie

Tangentialvektor

analog für M: $\overbrace{\underline{x} \times \underline{f}}^{\text{integriere}}$

• Translations-Rotations-Kopplung: $C \sim \zeta_\parallel - \zeta_\perp \neq 0$!

also: $\Omega \longrightarrow F = C\Omega$ ... Schubkraft

$u \longrightarrow M = Cu$ ... „Schubdrehmoment"

(i) anschaulich: Rotation $\longrightarrow$ Reibungskraftkomp. $\parallel$ Helixachse

$\longrightarrow$ Schubkraft

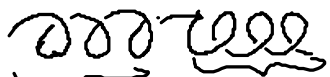
s. Folie

(ii) abstrakt: Punktspiegelung am Ursprung

rechtshändige $\longrightarrow$ linkshändige Helix

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u}, \underline{F} \longrightarrow -\underline{u}, -\underline{F} \\ \underline{\Omega}, \underline{M} \longrightarrow \underline{\Omega}, \underline{M} \\ \text{also: } \begin{pmatrix} -F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u \\ \Omega \end{pmatrix} \end{array}\right\} C \to -C$$

$\Longrightarrow$ C … Pseudoskalar: $C \sim \pm 1$ für Rechts-/Linksschraube eines chiralen Objekts

(iii) nicht chirales Objekt: 

Rechts- Linksschraube

$$\text{Reibungsmatrix: } \begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

- unvollständige Helix: [Höhe $\neq np$, $n \in \mathbb{N}$]

$\underline{\Omega}, \underline{u} \parallel \underline{\hat{v}} \longrightarrow \underline{F} \nparallel \underline{\hat{v}}$ … Driftbewegung!