

4.6 Hydrodynamische Reibung von Teilchen

• in Kap. 4.4: Stokessche Reibung von Kugeln

a) Teilchen beliebiger Gestalt:

• Fragestellung: 

Geg: $\underline{v}, \underline{\Omega} \rightarrow$ Ges: äußere Kraft \underline{F} , Drehmoment \underline{M}

• Stokesde Gln. linear in $\underline{v} \rightarrow$ lineare Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\beta} & \underline{\zeta} \\ \underline{\zeta}^t & \underline{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{\beta} \underline{v} + \underline{\zeta} \underline{\Omega} \\ \underline{M} &= \underline{\zeta}^t \underline{v} + \underline{\beta} \underline{\Omega} \end{aligned}$$

Bem: (i) $\left. \begin{matrix} \underline{\beta} \\ \underline{\zeta} \end{matrix} \right\}$ Reibungstensoren für $\left\{ \begin{matrix} \text{Translation} \\ \text{Rotation} \end{matrix} \right.$

(ii) $\underline{\zeta}$... Kopplungstensor für Translation und Rotation

(iii) Es gilt: $\underline{\beta}^t = \underline{\beta}, \underline{\beta} = \underline{\beta}^t, \underline{\zeta} \text{ und } \underline{\zeta}^t$ (4.38)

$\left[\begin{pmatrix} \underline{\beta} & \underline{\zeta} \\ \underline{\zeta}^t & \underline{\beta} \end{pmatrix} \right]$ ist symmetrisch!

Beweis: im Prinzip Onsager'sches Reziprozitätsrelation (s. Kap. 3.8 b)

Stokes-Gln: Spinelles Reziprozitätskorem

(iv) $\underline{\beta}, \underline{\beta}, \underline{\zeta}$ müssen Symmetrie des Teilchens wieder spiegeln

(v) Bsp: Kugel (vgl. Kap. 4.4)

$$\underline{\beta} = 6\pi\eta a \underline{1}, \underline{\beta} = 8\pi\eta a^2 \underline{1}, \underline{\zeta} = 0 \quad (4.39)$$

Basis: $\underline{C} = \underline{0}$

(1) $\underline{C} \dots$ Pseudotensor 2. Stufe

$\hat{=} \underline{C} \rightarrow -\underline{C}$ unter Punktspiegelung
am Ursprung ($\mathcal{R} = -1$)

Grund: polare Vektoren $\underline{F}, \underline{u} \xrightarrow{\mathcal{R} = -1} -\underline{F}, -\underline{u}$

Pseudo-axiale } Vektoren $\underline{M}, \underline{\Omega} \xrightarrow{\mathcal{R} = -1} \underline{M}, \underline{\Omega}$

[Vertauschung: $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} \xrightarrow{\mathcal{R} = -1} \underline{M}$]

(2) Symmetriegruppe der Kugel: $O(3)$

$\rightarrow \underline{C} = \underline{0}$

• dissipierte Energie pro Zeiteinheit:

$$\boxed{W = \underline{F} \cdot \underline{u} + \underline{M} \cdot \underline{\Omega}} \quad (4.40)$$

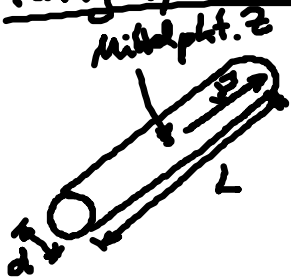
$$\left(\frac{dW}{dt} \right) = \underline{u} \cdot \underline{f} + \underline{\Omega} \cdot \underline{K} + 2\underline{u} \cdot \underline{C} \underline{\Omega}$$

• $\underline{\Omega}, \underline{M}$ relativ zu Pkt. gewählt \rightarrow

führe ein: Reaktionszentrum, so daß $\boxed{\underline{C} = \underline{C}^t}$ (4.41)

o.B.!

b) langer, dünner Stab:



$\frac{L}{d} \dots$ Aspektverhältnis

• Kopplungstensor (für \underline{z} = Reaktionszentrum)

$$\underline{C} = \underline{0} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \underline{F} = \underline{f} \underline{u} \\ \underline{M} = \underline{K} \underline{\Omega} \end{matrix}} \quad (4.42)$$

• Translation:

$$\mu = \mu_1 \hat{v} \otimes \hat{v} + \mu_2 (1 - \hat{v} \otimes \hat{v}) \quad (4.43)$$

mit $\mu_1 = \frac{4\pi\eta}{\ln(L/d)}$ $L \approx 2\mu_0$, $L \gg d$

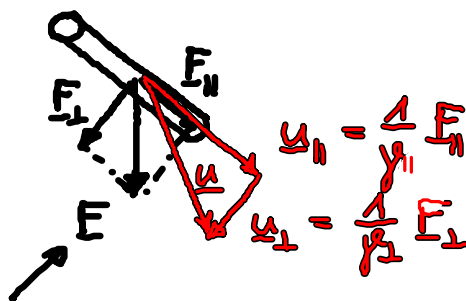
Bem: (i) Rotationssymmetrie um \hat{v} $\rightarrow \mu \in \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \mu_1 \end{pmatrix}$
 [formal. C_{∞} -Achse $\parallel \hat{v}$]
 Matrixform

$\hat{v} \otimes \hat{v}$ projiziert aus u die Komponente zu \hat{v}
 $1 - \hat{v} \otimes \hat{v}$ " " " " \perp zu \hat{v}

\rightarrow 2 Reibungskonstante: $u_{\parallel \hat{v}} \rightarrow F_{\parallel} = \mu_1 u_{\parallel}$
 $u_{\perp \hat{v}} \rightarrow F_{\perp} = \mu_2 u_{\perp}$ (4.44)

(ii) i.a. $F \propto u$

Bsp:



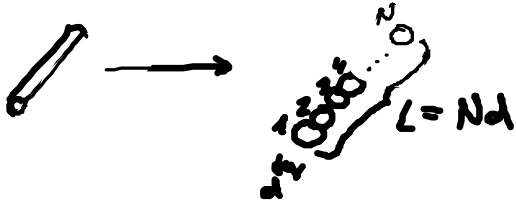
Bsp:
Gewichtskraft

\rightarrow Driftbewegung $\perp F$

(iii) Randeffekte des Stabs $\rightarrow \mu_2 \neq 2\mu_1$

Bsp: $\mu_2 = \frac{3}{2} \mu_1$ für $\frac{L}{d} \approx 20$

(iv) Beweis von (4.43): s. Übungen?



Oseen-Tensor
 Jede Kugel \rightarrow Stokeslet $\underline{v}_j(\underline{x}) = \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}_j) \frac{\underline{F}}{N}$
 Kraft wirkt auf alle Kugeln (Randeffekte vernachlässigt)

$$\rightarrow \underline{u} = \underline{u}(\underline{x}_i) = \underbrace{\frac{1}{2\pi\eta d} \frac{\underline{F}}{N}}_{\text{durch Kraft auf Kugel } i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \underline{v}_j(\underline{x}_i)}_{\text{von anderen Kugeln}}$$

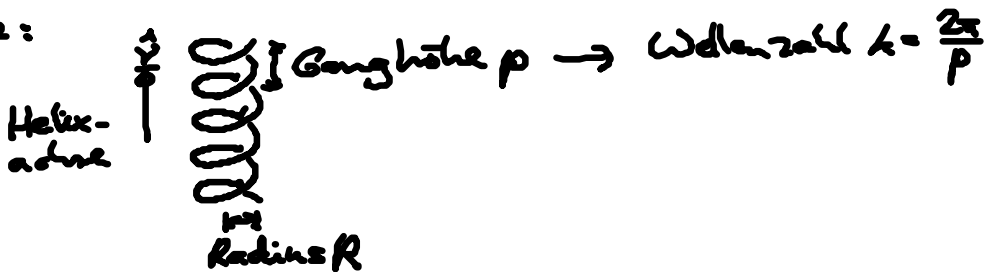
• Rotation: (o.B.)

$$\underline{M} = \beta \underline{\Omega} \perp \hat{\underline{z}} \quad (4.45)$$

mit $\beta = \frac{\pi\eta L^2}{3 \ln(L/d)}$

c) Helix = Schraubenlinie

• Geometrie:



Ortsvektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ p \frac{\varphi}{2\pi} \end{pmatrix}$, $\hat{\underline{z}} \parallel \underline{e}_z$, $\varphi \dots$ Azimutwinkel

Rechtschraube } Punktspiegelung oder Spiegelbild
 rechts händige Helix } { Linksschraube
 ... chirales Objekt } links händige Helix

• Beschränkung: $F, M, u, \Omega \parallel \hat{z}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & C \\ C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{mit } \gamma &= \frac{2\pi}{R^2 k^{-2}} (\int_{||} k^{-2} + \int_{\perp} R^2) \\ \beta &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot}} R^2 (\int_{||} R^2 + \int_{\perp} k^{-2}) \\ C &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot}} k^{-1} R^2 (\int_{||} - \int_{\perp}) \end{aligned} \right\} (4.47)$$

für eine Ganghöhe

$\int_{||}, \int_{\perp}$... Reibungskoeffizienten pro Längeneinheit \parallel, \perp Helixsegment

$$\int_{\perp} \approx 2 \int_{||} \quad [\text{s. Gl. (4.43)}]$$

Beweis: s. Übungen??

Behalte: $\varphi \uparrow u$
 $\varphi \uparrow \Omega$

Bestimme F durch Integration

von $f = [\underbrace{\int_{||} \varphi \otimes \varphi}_{\text{Tangentialvektor}} + \int_{\perp} (1 - \varphi \otimes \varphi)] \times$ entlang der Schraublinie

analog für M : $\int \hat{z} \times f$ ^{integriere}

• Translations-Rotations-Kopplung: $C \approx \int_{||} - \int_{\perp} \neq 0!$

also: $\Omega \rightarrow F = C \Omega$... Schubkraft

$u \rightarrow M = C u$... „Schubdrehmoment“

(i) anschaulich: Rotation \rightarrow Reibungskraftkomp. \parallel Helixachse
 \rightarrow Schubkraft

s. Folie

(ii) abstrakt: Punktspiegelung um Ursprung
 rechtsläufige \rightarrow linksläufige Helix

$$u, E \rightarrow -u, -E$$

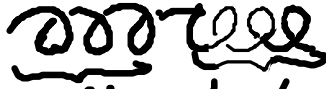
$$\Omega, M \rightarrow \Omega, M$$

$$\text{also: } \begin{pmatrix} -F \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u \\ \Omega \end{pmatrix}$$

$$C \rightarrow -C$$

$\Rightarrow C \dots$ Pseudoskalar. $C \sim \pm 1$ für Rechts-/Linksschraube eines chiralen Objekts

(iii) nicht chirales Objekt:



Rechts- Linksschraube

$$\text{Rotationsmatrix: } \begin{pmatrix} \beta & C \\ C & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} \quad (445)$$

• unvollständige Helix: [Höhe $\neq n\rho$, $n \in \mathbb{N}$]

$$\underline{\Omega}, \underline{u} \parallel \underline{\hat{z}} \rightarrow \underline{E} \perp \underline{H} \underline{\hat{z}} \dots \text{Driftbewegung!}$$