9.1. Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$

- Mittel-/Erwartungswert einer Observablen $f(x)$:

$$\boxed{\langle f \rangle = \int f(x)\, \underbrace{P(x)\,dx}_{\text{Wahrscheinl. mit der } f(x) \text{ vorkommt!}}} \qquad (9.3)$$

- n-tes Moment von $P(x)$:

$$\boxed{\langle x^n \rangle = \int x^n P(x)\,dx} \qquad (9.4)$$

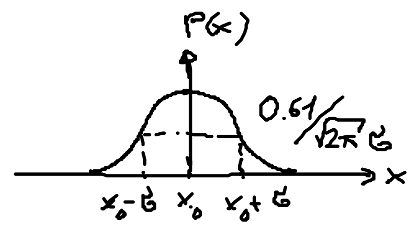
insbes.:
(i) Mittelwert: $\langle x \rangle$
(ii) Varianz von x
= Schwankungsquadrat
= mittlere quadratische Abweichung

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \mathrm{Var}(x) \qquad (9.5)$$

Standardabweichung: Δx ... "Breite von $P(x)$" Schwankungsbreite (9.6)

- Bsp: Gaußsche / Normalverteilung

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \qquad (9.7)$$



Momente:

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ gerade: } \langle (x-x_0)^n \rangle = \overbrace{(n-1)!!}^{(n-1)(n-3)\dots}\, \sigma^n \\ \qquad \text{insbes.: } \langle (x-x_0)^2 \rangle = \sigma^2 \\ n \text{ ungerade: } \langle (x-x_0)^n \rangle = 0 \\ \qquad \text{insbesondere: } \langle x \rangle = x_0 \end{array}\right\} \qquad (9.8)$$

- $\boxed{\text{Kenntnis aller } \langle x^n \rangle \longleftrightarrow P(x)}$ (9.9)

Beweis über charakt. Funktion: $G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle$

- mehrdimensionale Verteilungen: $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ... stochast. Variable

$P(\underline{x})\, d^n x$ ... Wahrscheinlichkeit für $[x_1, x_1+dx_1] \dots [x_n, x_n+dx_n]$

(i) unabhängige stochast. Variable x, y:

$$\boxed{P(x,y) = P(x)\,P(y)} \qquad (9.10)$$

... Multiplikationsregel

(ii) Korrelationsfktn.:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \end{aligned}} \qquad (9.11)$$

... Kovarianzmatrix

stochast. unabh. Variable $\Rightarrow$ $C_{ij} = 0$!

(iii) **Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte** $P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)$ für $x_1 \dots x_k$, wenn $x_{k+1} \dots x_n$ mit Sicherheit vorliegen:

$$P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1} \dots x_n)} \qquad (9.12)$$

wobei $P(x_{k+1} \dots x_n) = \int dx_1 \dots dx_k \; P(x_1, \dots, x_n)$

[„Beweis": $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)\, P(x_{k+1} \dots x_n)$!!]

9.2 Zentraler Grenzwertsatz

Seien $x_1, x_2, \dots x_N$ voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$, dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ im Grenzfall $N \to \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi (\Delta y)^2}}\, e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \qquad (9.13)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \Delta x^2$

Insbesondere gilt: $\dfrac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \dfrac{\Delta x}{\langle x \rangle \sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

- Beweis: Stat. Phys. I, SS09, Kap. 3.5 [Ehreide: Vorlesung?]

9.3 Zeitabhängige Zufallsvariablen

- Behandlung in 10: $x = x(t)$ ... zeitabhängige Zufallsvariable
- Führe ein:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x_n,t_n;\dots;x_1,t_1)\,dx_1\dots dx_n \quad \text{mit } t_1 < t_2 \dots < t_n \\ \dots \text{Wahrscheinlichkeit } x \text{ zur Zeit } t_1 \text{ in } [x_1, x_1+dx_1] \\ \qquad \qquad \text{"} \quad \text{"} \quad t_2 \quad \text{"} \quad [x_2, x_2+dx_2] \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \qquad t_n \text{ in } [x_n, x_n+dx_n] \\ \text{vorzufinden.} \end{array}} \tag{9.14}$$

Bem: (i) für $n = 1, 2, \dots \longrightarrow$ Hierarchie von Wahrscheinlichkeitsdichten

(ii) insbesondere:

$$\boxed{P(x_{n-1},t_{n-1};\dots;x_1\,t_1) = \int P(x_n,t_n;\dots;x_1,t_1)\,dx_n} \tag{9.15}$$

- Berechnung von Zeitkorrelationsfkt.:

Bsp:
$$\boxed{\langle x(t_2)\,x(t_1)\rangle = \iint x_2\,x_1 \;\; P(x_2,t_2;x_1,t_1)\,dx_1\,dx_2} \tag{9.16}$$

a) Klassifizierung Stochastischer Prozesse:

- Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte: [vgl. Gl. (9.12)]

$$\boxed{P(x_n,t_n\,|\,x_{n-1},t_{n-1};\dots;x_1,t_1) = \frac{P(x_n,t_n;\dots;x_1,t_1)}{P(x_{n-1},t_{n-1};\dots;x_1,t_1)}} \tag{9.17}$$

... für x_n,t_n wenn $x_{n-1},t_{n-1};\dots;x_1,t_1$ mit Sicherheit vorliegen

- **reiner Zufallsprozeß:**

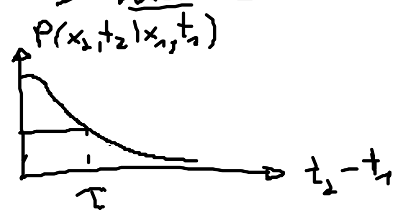
$$P(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\dots;x_1,t_1) = P(x_n,t_n)$$
$$\overset{(9.17)}{\Longleftrightarrow} \quad P(x_n,t_n;\dots;x_1,t_1) = P(x_n,t_n)\dots P(x_1,t_1) \qquad (9.18)$$

<u>keine</u> Korrelationen zwischen verschiedenen Zeiten, nicht möglich in physikal. System mit $x = x(t)$

- **Markov-Prozeß:**

$$P(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1};\dots x_1,t_1) = P(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})$$
$$\overset{(9.17)}{\Longleftrightarrow} \quad P(x_n,t_n;\dots;x_1,t_1) = P(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\,P(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2}) \dots P(x_2,t_2|x_1,t_1)\,P(x_1,t_1) \qquad (9.19)$$

$\longrightarrow$ <u>nur</u> Gedächtnis für den vorigen Zeitpkt!



Übergangswahrscheinlichkeit: $\quad \boxed{P(x_2,t_2|x_1,t_1) = \dfrac{P(x_2,t_2;x_1,t_1)}{P(x_1,t_1)}}$

$\longrightarrow$ $P(x_2,t_2;x_1,t_1)$ bestimmt Markov-Prozeß vollständig!

- insbesondere gilt:

$$\boxed{P(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int P(x_3,t_3|x_2,t_2)\,P(x_2,t_2|x_1,t_1)\,dx_2}$$

... Chapman-Kolmogorov-Gl.!!

„bedingte Wahrscheinlichkeit, egal welcher Wert x_2 angenommen wird"